



Гуго Штейнгауз

---

# ЗАДАЧИ И РАЗМЫШЛЕНИЯ

---

*Перевод с польского  
Составитель и переводчик  
Ю. А. ДАНИЛОВ*

---

*Под ред. Я. А. СМОРОДИНСКОГО*

---

---

Издательство «Мир»

Москва

1974

## Штейнгауз Г.

Ш88

Задачи и размышления. Пер. с польск. Сост. и пер. Ю. А. Данилов. Под ред. Я. А. Смородинского, М., «Мир», 1972.

Имя замечательного польского математика Гуго Штейнгауза хорошо известно советским читателям по переводам его популярных книг «Математический калейдоскоп» и «Сто задач». В предлагаемой книге читателя ожидают не только новые задачи и встречи с «доктором всех математических наук Сильвестром Шарадеком», но и интересное введение в теорию вероятностей и популярные статьи о взаимосвязи математики с другими науками и ее роли в современном мире. Книга доставит удовольствие самым широким кругам читателей, интересующихся математикой.

Ш  $\frac{20201-192}{041(01)-74}$  192—74

51

© Перевод на русский язык, «Мир», 1974.

Редакция научно-популярной  
и научно-фантастической литературы

Г. Штейнгауз

## ЗАДАЧИ И РАЗМЫШЛЕНИЯ

Редактор А. Г. Белевцева      Оформление художника С. И. Мухина  
Иллюстрации Ю. А. Ващенко      Художественный редактор Ю. Л. Максимов  
Технический редактор Н. Д. Толстякова      Корректор И. П. Максимова

Сдано в набор 22/V 1974 г.      Подписано к печати 17/X 1974 г.      Бум. № 2  
84×108<sup>1</sup>/<sub>32</sub>=6,25 бум. л.      21 усл. печ. л.      Уч.-изд. л. 21,39      Изд. № 12/7365  
Цена 1 р. 22 к.      Зак. 203.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»  
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени Ленинградская типография № 2  
имени Евгении Соколовой Союзполиграфпрома при Государственном  
комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии  
и книжной торговли. 198052, Ленинград, Л-52, Измайловский проспект, 29



# СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие . . . . .	6
Э. Марчевский. Воспоминания о Гуго Штейнгаузе . . . . .	9

## ОРЕЛ ИЛИ РЕШКА? 27

Приступаем к игре . . . . .	28
Закон больших чисел . . . . .	31
Случайные числа . . . . .	40
Выборочная оценка товаров . . . . .	47
Разброс чисел . . . . .	53
Отклонение среднего квадратов от квадрата среднего, или дисперсия . . . . .	57
Контроль за качеством . . . . .	60
Средняя квадратичная ошибка . . . . .	61
Капли дождя . . . . .	63
Польские города . . . . .	66
Деревушка в горах . . . . .	71

## ЕЩЕ СТО ЗАДАЧ 75

Числовая решетка, неравенства и последовательности . . .	76
Плоскость, окружности и многоугольники . . . . .	79
Пространство, сферы и многогранники . . . . .	85
Задачи практичные и ... непрактичные . . . . .	89
Новые математические приключения доктора Сильвестра Шарадека . . . . .	96
Спортивные задачи . . . . .	102
Приложение. Задачи для младших школьников . . .	105
Решения . . . . .	107

## ЧЕМ ЗАНИМАЕТСЯ И ЧЕМ НЕ ЗАНИМАЕТСЯ МАТЕМАТИКА 219

Предисловие . . . . .	221
I. Определение математики . . . . .	223
II. Развитие математики . . . . .	242
III. Практические приложения . . . . .	267
IV. Математический метод . . . . .	281
V. Дифференциальное и интегральное исчисление . . .	298
VI. Вычислительная математика . . . . .	318
VII. Ошибки в математике . . . . .	340
VIII. Математика и жизнь . . . . .	351

## РАЗМЫШЛЕНИЯ О ЛЮБИМОЙ НАУКЕ 361

Математика вчера и сегодня . . . . .	362
О математической строгости . . . . .	376
Пути прикладной математики . . . . .	387



Выдающийся польский математик Гуго Штейнгауз до сих пор был известен широкому кругу наших любителей математики как автор двух популярных книг «Математический калейдоскоп»\* и «Сто задач»\*\*.

Обе книги весьма своеобразны. Если первая представляет собой, по словам автора, «книжку с картинками», то вторая объединяет сто задач, «возникших естественным образом из геометрических явлений или реальных обстоятельств». По замыслу автора, эти задачи «должны ввести читателя в практику того универсального метода трактовки явлений, которому греки дали название «математика», и «показать ему эту науку на доступном материале». Свой «Математический калейдоскоп» Штейнгауз сравнивал с зоопарком, в который может войти даже тот, кто смотрит на животных лишь для развлечения. В то же время каждая из ста задач проста по форме, но не тривиальна по содержанию.

Книги Гуго Штейнгауза занимательны в высшем смысле слова — в том смысле, в каком понимал занимательность известный советский популяризатор Я. И. Перельман. В своей статье «Что такое занимательная наука?» он писал: «Кто бы вздумал судить о занимательной науке, исходя только из буквального смысла

---

\* Г. Штейнгауз, Математический калейдоскоп, М., Гостехиздат, 1949.

\*\* Г. Штейнгауз, Сто задач, М., Физматгиз, 1959.

карамзинского слова «занимательный», тот, вероятно, отождествил бы ее с наукой развлекательной, увеселительной. Однако простая справка в «Толковом словаре русского языка» показывает, что сущность дела здесь вовсе не в простой занимательности. Словарь поясняет: «Занимательный — возбуждающий интерес, внимание». Это кратко, но вполне правильно характеризует одну из существенных черт занимательной науки».

Предлагаемый вниманию читателя сборник не издававшихся ранее в русском переводе популярных работ Штейнгауза содержит занимательное введение в теорию вероятностей, «Орел или решка?», «Еще сто задач», продолжающих и развивающих традицию изданных ранее «Ста задач», популярную книжку «Чем занимается и чем не занимается математика» и тесно связанные с ней статьи — размышления о математике, ее методе, математической строгости и связи математики с другими науками и внешним миром.

Составление раздела «Еще сто задач» вызвало наибольшие трудности, поскольку собранные в нем задачи были разбросаны по страницам журнала «Matematyka». Так же, как и сам Гуго Штейнгауз в книге «Сто задач», мы приводим в основном те решения задач, которые были предложены читателями этого журнала.

Вопрос «Чем занимается математика?» на первый взгляд может показаться странным, однако известно, что именно на простые вопросы отвечать труднее всего: их наивность может неожиданно обернуться глубиной. В действительности же вопрос этот далеко не прост, и любитель, пытаясь найти ответ на него, рискует оказаться в тисках порочного круга: «Математика — это то, чем занимаются математики, а математики — это те, кто занимается математикой». Ответ, предлагаемый Штейнгаузом, тем более интересен, что исходит от человека, чей вклад в развитие математики широко известен.

Сборнику предпосланы «Воспоминания о Гуго Штейнгаузе», написанные близко знавшим его и на протяжении многих лет сотрудничавшим с ним проф. Э. Марчевским. Они были опубликованы в журнале «Odra» (№ 5, 1973 г.). Наше внимание на этот интересный очерк обратил сотрудник Объединенного института ядерных исследований в Дубне В. Гарчевский.

Своеобразие стиля Штейнгауза-популяризатора обусловлено не только его глубокими профессиональными познаниями, но и афористичностью мышления, тонкой иронией, отточенностью формы и особым восприятием мира. Штейнгауз мыслил образами. Штейнгауз-художник неотделим от Штейнгауза-математика.

В своих популярных произведениях Штейнгауз стремился передать читателю главное — дух математики, ощущение ее цельности. Мы надеемся, что и читатель этого сборника сумеет увидеть то общее, что объединяет различные главы, а это и есть математика.

Отдельные работы публикуются с сокращениями.

Ю. Данилов  
Я. Смородинский



## ВОСПОМИНАНИЯ О ГУГО ШТЕЙНГАУЗЕ

С Гуго Штейнгаузом я познакомился в Варшаве осенью 1929 г. Он приехал из Львова на Съезд математиков славянских стран, на котором и я — в ту пору еще начинающий математик — должен был выступать с докладом.

Мы встретились в Краковском предместье по дороге на прием в честь открытия съезда. Меня представили Штейнгаузу возле львов, стерегущих бывший дворец наместника.

— А, так это вы занимаетесь задачей о коробках спичек? — живо откликнулся Штейнгауз и тут же сформулировал задачу, о которой шла речь, оперируя придуманным им самим наглядным образом — «коробком спичек». Разумеется, я был очень горд, что известный ученый знаком с проблемой, над которой я в ту пору размышлял, и в то же время меня удивила необычная форма постановки задачи: идеальные отрезки на прямой я представлял себе яснее, чем реальные спички.

Тогда же мне довелось узнать от Штейнгауза, что в съезде, на который мы приехали, нам предстоит «участвовать», а не «принимать участие».

С теплым чувством я вспоминаю нашу первую встречу. Тогда я еще не сознавал, что в том коротком разговоре проявились два наиболее сильных увлечения Штейнгауза, и тем более не мог предполагать, что

спустя много лет нам доведется четверть века работать во Вроцлаве в самом тесном контакте.

Во время второй мировой войны Штейнгауз написал «Воспоминания». Эти «Воспоминания» (доведенные до 1920 г.) недавно были опубликованы. Содержащиеся в них факты, наблюдения и размышления имеют важное значение для характеристики не только самого автора, но и той эпохи, людей и мест, главным образом Галиции и Геттингена.

Из многих тем, затронутых в «Воспоминаниях», я выбрал лишь некоторые и дополнил их отрывками из других выступлений Штейнгауза и собственными воспоминаниями. Главной теме — научной деятельности Штейнгауза — я посвящаю две заключительные части своей статьи.

### У СЛИЯНИЯ ТРЕХ РЕК

Гуго Штейнгауз родился 14 января 1887 г. Те, кому довелось часто встречаться с ним, хорошо знают, с каким теплым чувством он вспоминал край, в котором родился, и город, где прошло его детство. Как он радовался, узнав, что знаменитый венгерский математик Людвик Фейер еще помнит его старый адрес: Ясло, Рынок.

...Город лежал у слияния трех рек, в неглубокой долине, окруженной пологими холмами. Полчаса ходьбы к северу от каменоломни — и перед вами открывался вид на белые дома, голубые Карпаты, серебристую Вислоку и зеленую равнину. На западе находилось Подзамче: классическая экскурсия к руинам замка Фирлеев заканчивалась в придорожной корчме. Другие корчмы, расположенные в окрестности, носили не менее живописные названия: Лапигуз, Лихтаж и Похуланка, но дорога над Вислокой через Подзамче до Колачиц и Тарнова была важнейшей. Так думали те, кто построил на этой дороге крепость. Так думал и я: ведь именно по этой дороге приезжал каждую неделю запряженный тройкой лошадей воз, груженный табаком из главного склада в Тарнове. Табак предназначался для «монопольки» — лавочки, которую держал мой отец.

Об отце Богуславе и дядюшке Игнации в «Воспоминаниях» говорится неоднократно. Приведем отрывок — едва ли не лучший, который посвящен им обоим.

Стоило посмотреть на этих двух братьев, так не похожих друг на друга. Отец обладал изрядной долей юмора, любил

жизнь, свой дом и семью, был не прочь вкусно поесть и знал толк в напитках, любил дружескую компанию, свои поля и сад, свой кирпичный завод и лошадей в конюшне. Он понимал, что жадность, честолюбие и снобизм так же не приносят счастья и даже удовлетворения, как и безделье, расточительность, немощь и зависимость от кого-нибудь. Ясный день, красивый дом, стройная яблоня в саду радовали его больше, чем многочисленные цифры на счету в банке. Дядюшка был человеком совершенно иного склада. Его честолюбивая натура тяготела к большим городам, где решают проблемы войны и мира, где хорошо обдуманная сделка приносит тысячные барыши и где встречаются влиятельные люди с громкими титулами... Не раз, повинувшись безотчетному порыву, говорил он отцу, как бы вторя словам ростовщика из оды Горация: «Как же ты счастлив, что живешь у себя в доме, а не в гостинице, спишь на собственной постели, а не в спальном вагоне, ешь блюда собственной, а не ресторанной кухни!» Но стоило дядюшке пробыть в Ясле неделю, как его одолевало беспокойство, что где-то, во Львове или Вене, без него вершатся большие дела... И снова он уезжал из дому, снова портил себе желудок и снова возвращался...

Игнаций Штейнгауз был депутатом венского парламента. О нем с симпатией и признательностью пишет в своих воспоминаниях Винсентий Витос.

Следующий отрывок из «Воспоминаний» посвящен деду.

Помню, как дед советовал мне вставать до рассвета, чтобы в уединении и тиши следить за пробуждением птиц, лишь несмело пробовавших свои голоса. По мере того как солнце поднималось над горизонтом, эти голоса сливались в величественную симфонию радости.

Кто во Вроцлаве не знал, что Штейнгауз был большим любителем прогулок и экскурсий. Его часто можно было видеть гуляющим в одиночестве или вместе с женой над Одрой близ Бускупина. Штейнгауз всегда зорко присматривался к окружающей природе, но лишь прочитав «Воспоминания», понимаешь, как живо и глубоко он ее чувствовал. Приведем хотя бы несколько отрывков. О купании в Вислоке:

...купание в реке доставляет физическое наслаждение, которое человек не испытывает ни в ванне, ни в бассейне. Может быть, ил и песок, может быть, корни и листья трав и деревьев, омываемых рекой на ее пути, придают быстро несущемуся водному потоку ту мощь, от которой захватывает дух...



## О первой встрече с морем:

...пошел прямо. Вскоре вышел к реке. Набережная была вымощена камнем. По реке плыло множество барж и даже пароход. Я сказал себе, что река непременно должна впадать в море, и направился берегом вниз по течению. Дойдя до конца набережной я спрыгнул на песок, а моря все не было. Но стоило миновать песчаную дюну, как вдруг я увидел нечто удивительное: нескончаемую вереницу белых грив. Они двигались ко мне и, с грохотом рассыпаясь, превращались в мутную темно-зеленую воду. Я услышал несмолкающую мелодию прибоя и ощутил соленый ветер... Пораженный невиданным зрелищем, я стоял, пока, спохватившись, не заметил, что давно пора закрыть рот, вот уже несколько минут раскрытый от изумления.

Значительно позднее состоялась первая вылазка в Татры.

Тогда я впервые увидел Татры. Мы шли через Горычков перевал, а затем обходили Крывань Тихой долиной до Подбаньска, где ночевали. Когда выбираешь трудный маршрут и идешь лесистыми холмами, затем горными лугами и под конец продираешься сквозь заросли карликовой сосны, чтобы на перевале внезапно ощутить иной воздух, увидеть освещенную солнцем буйную траву южного склона и мерцающую вдали сквозь голубую дымку венгерскую равнину, перед которой Крывань возвышается, как разлегшийся на покой темный лев, услышать под собой стрекот миллиона кузнечиков в Тихой долине... когда идешь так, то потом просто не можешь не стать ярым противником канатных дорог.

Всем странствиям — малым и большим — непременно сопутствовали наблюдения и размышления. Много их и в «Воспоминаниях» Штейнгауза, и в воспоминаниях о нем его учеников. О звездах и планетах, о северном сиянии, о бабочках, гибнущих в Черном пруду, о морских приливах и отливах, о птицах, убегающих от собаки на лугу над Одрой...

Должно быть, именно из таких наблюдений не рождались математические идеи. Так, один из вариантов закона больших чисел, сформулированный Штейнгаузом, возник, когда он любовался звездным небом.

## ЛАКОНИЧНЫЙ, УПРУГИЙ, ЛЕГКИЙ И МОГУЧИЙ...

Штейнгауза живо интересовало все, связанное с польским языком. Всеми силами он старался оградить язык от вычурности, избитых выражений, канцелярских штампов и, наоборот, употреблял немало выражений

латинского происхождения («Раз из латыни, то уже хорошо», — сказал он мне однажды), в том числе и редких (например, конъектура — предположение). Однако «ополячивание» медицинской терминологии Штейнгаузу не нравилось. Он говорил, как все, скарлатина, дифтерит или склероз, но отнюдь не плоница, блоница\* и мяжджыца.

От своих учеников Штейнгауз требовал, чтобы те говорили, тщательно выбирая слова, но речь их была естественна, и чтобы писали так же, как говорили. Не выносил языка канцелярий и казарм, особенно не любил, когда фамилию называли перед именем, и не раз случалось отсылал назад письма, если они были адресованы «Штейнгаузу Гуго».

В 1946 г. в Дни культуры, которые ознаменовали официальное начало возрождения культурной жизни во Вроцлаве, в актовом зале Политехнического института состоялся поэтический утренник. Председательствовал Ярослав Ивашкевич, а некий профессор-литературовед, специально приехавший во Вроцлав на торжества, по одному вызывал поэтов на авансцену, делая это примерно так:

— Добровольский! Станислав Рышард...

Штейнгауз, сидевший в первом ряду, демонстративно выразил свое недовольство, после чего председательствовавший что-то шепнул на ухо профессору — остальные поэты были вызваны уже, как следовало:

— Анна Сьвирчиньска!

Удовлетворенный результатом своего вмешательства, Штейнгауз негромко прокомментировал:

— Вот теперь это поэтический утренник, а не вечерняя поверка на плацу!

Штейнгауз не терпел злоупотребления выражениями «на почве», «во главе угла» и «заострить вопрос». С юных лет он был непримирим к провинциализмам в языке. Вместе с тем некоторые часто встречающиеся языковые формы он также относил к провинциализмам, хотя и... столичным. Так, он критиковал варшавян за легкость, с которой они образуют различные прилагательные. Штейнгауз резко выступал против столь распространенного ныне злоупотребления иностранными

---

\* Соответствует русскому «глотошная» — дифтерит. — Прим. перев.

словами, кратко сформулировав наставление: «Не чувствуй!»

Ученый никогда не собирал воедино свои высказывания о языке и стиле, хотя однажды выступил перед математиками и гуманитариями с докладом «Несколько слов о нескольких словах», а в его публикациях на самые разные темы содержатся многочисленные намеки, упоминания и примечания, так или иначе связанные с вопросами языка. Характерно такое примечание в «Воспоминаниях»: «Красивый дом — дом, построенный успешно. Следует иметь в виду, что спешное строительство в отличие от успешного, как правило, приводит к плохим результатам».

Штейнгауз неоднократно сетовал на лингвистов и их критерии правильности языка, он считал, что они с чрезмерной легкостью принимают различные языковые искажения, не обладая достаточным чутьем. Пожалуй, трудно не согласиться с его мыслью о том, что новые формы языка лишь тогда можно считать общепринятыми, когда их начинает применять писатель, заботящийся о чистоте языка. Разумеется, это не означает одинакового отношения к языку всех писателей. Так, восхищаясь прозой Сенкевича, Штейнгауз высказывал претензии к языку Жеромского. Из современных литераторов он высоко ценил Ваньковича, хотя стиль его существенно отличается от стиля Сенкевича.

Меткостью и краткостью отличаются многочисленные афоризмы, каламбуры и остроты Штейнгауза, которые в разное время облетали сначала Львов или Вроцлав, затем Польшу, а порой даже и мир.

Так называемый «Рациональный словарь» Штейнгауза явился результатом особой игры слов. Каждое определение в нем имеет, по словам Штейнгауза, «двойное покрытие». Мы не будем приводить здесь многочисленные понятия, «разъясняемые» в словаре, но трудно устоять перед искушением и не процитировать одно из наиболее известных определений: «Земля — шар у ноги». Восхищенный им Юлиан Тувим не мог не склонить низко голову перед его автором.

Несколько лет назад, когда ректор Вроцлавского университета пригласил Штейнгауза в свою машину, тот изрек: «Не мобильный автомобиль». А когда оказалось, что машина действительно неисправна и по-



ломки происходят часто, добавил в словарь новое определение: «Надежда ректора добраться на собственной машине — автонадеянность (не путать с самонадеянностью)».

Обширные выдержки из словаря Штейнгауза Тувим в свое время опубликовал в разделе «Архив и паноптикум культуры» журнала *Problemy*, а некоторые определения с иллюстрациями Ежи Зарубы можно найти на страницах журнала *Szpilki*.

Одному профессору, который пытался оправдать свое поведение ссылкой на то, что он «должен был» поступить так, а не иначе, Штейнгауз ответил: «Никто не должен быть должным».

Штейнгауз высоко ценил университетские традиции, но иногда позволял себе подтрунивать и над ними: «Учебный год — это сумма академических часов, два академических часа — это полтора часа, а в одном часе — лишь три четверти часа». И еще один афоризм: «Лекарства нужно принимать, пока они не вышли из моды, а то потом они перестают помогать».

Еще в молодости Штейнгауз воспринял взгляды венского писателя Карла Крауса, который издавал (и полностью заполнял плодами своей мысли и пера) еженедельник «Факел». В «Воспоминаниях» Штейнгауз пишет об этом так:

Каждая статья, каждое слово, каждый ответ были, как углы необтесанного камня... Свободный от аффектации XIX века, от профессорского педантизма и косноязычия, от пафоса Ницше и телеграфных сокращений литературных агентов XX века, немецкий язык стал лаконичным, упругим, легким и могучим. Соразмерность отдельных частей, пунктуация, ритм и даже графическое оформление текста были безупречными...

Эта прекрасная характеристика в полной мере относится и к языку самого Штейнгауза, нигде не формулировавшего в явном виде своих взглядов на стиль. Те же черты присущи всему, что вышло из-под его пера: книгам по математике и предисловиям к ним, текстам многочисленных речей, популярным статьям о математике и математиках, воспоминаниям и письмам.

Полное отсутствие пафоса! Тем больше впечатляли те редкие случаи, когда сквозь холодный реализм стиля Штейнгауза прорывалась неподдельная взволнованность.

Как-то раз, выходя из леопольдинского зала Вроцлавского университета после успешной защиты диссертации одним из многих его учеников, Штейнгауз изрек:

— Теперь мы можем сказать себе — не без пафоса, — что нам удалось влить новое вино в старые мехи.

И еще один пример. Заканчивая выступление о Стефане Банахе, Штейнгауз сказал:

— ...Банах сочетал в себе искру гения с каким-то удивительным внутренним императивом, который непрестанно говорил ему словами поэта: «Есть лишь одно — ревностная слава ремесла»\*, — а математики хорошо знают, что их ремесло проистекает из того же таинственного начала, что и ремесло поэтов...

Лишь одно было исполнено для него подлинного пафоса — наука, которой он занимался.

### РЕВНОСТНАЯ СЛАВА МЫШЛЕНИЯ

Можно ли применить строку Верлена к творчеству самого Штейнгауза? Нет, ибо он никогда не согласился бы с тем, что «есть лишь одно». И все же в его размышлениях была та неумная страсть, о которой говорит поэт.

Математикой Штейнгауз начал интересоваться еще в бытность свою учеником ясельской гимназии. Хотя он увлекался литературой, физикой, философией, техникой и интересовался всем, что происходило как поблизости, так и вдалеке (а в ту пору происходило многое), тем не менее вполне самостоятельно и решительно остановил свой выбор на занятиях математикой. Читал случайно попадавшие в руки математические книги: «Указать мне хорошие книги было некому, о чем, по правде говоря, я не очень сожалею: погрузившись с юных лет в занятия математикой, я упустил бы все остальное».

Проучившись год во Львове, Штейнгауз (по совету случайного знакомого — профессора Политехнического института в Шарлоттенбурге) перевелся в Геттингенский университет. Мысль о переводе, несомненно, была удачной. Геттинген в те годы считался Меккой математиков всего мира. С плеядой геттингенских профессоров и доцентов математики тех лет (Клейн, Гильберт, Лан-

---

\* «Il n'y a que la gloire ardente du metier». — П. Верлен.

дау, Цермело, Вейль и многие другие) не мог сравниться ни один состав университетских преподавателей математики. Знаменитые профессора, охотно вступавшие в научное сотрудничество, привлекали выдающихся слушателей со всего мира. В Гёттинген, чтобы встретиться с лучшими математиками и послушать их лекции, приезжали и молодые ученые из разных стран (в том числе из Польши — Серпинский, Банахович, Янишевский и другие). Заслуженной известностью пользовалась математическая библиотека Геттингенского университета.

Штейнгауз изучал так называемую чистую математику, а также различные дисциплины, объединенные под общим названием «прикладная математика», и астрономию. Посещал лекции, практические занятия по астрономии и геодезии. Немалую пользу приносили личные контакты с другими математиками, но «самым главным моим занятием было чтение в зале математической библиотеки» — вспоминал он впоследствии.

Штейнгауз прошел в Геттингене великолепную школу и в 1911 г. *summa cum laude*\* защитил докторскую диссертацию. Незадолго перед этим он познакомился с находившимся тогда в Геттингене известным физиком-экспериментатором Альбертом Майкельсоном. Заметив интерес Штейнгауза к физике, Майкельсон предложил ему занять должность ассистента-математика в своей лаборатории в Чикаго. Однако Штейнгауз и так достаточно долго пробыл за границей, поэтому он предпочел вернуться на родину и, по его собственным словам, в течение некоторого времени оставался «частным ученым».

В 1911 г. Штейнгауз начал публиковать в польских и заграничных журналах результаты своих исследований из области математического анализа, главным образом теории тригонометрических рядов, в которой вскоре стал компетентным и известным специалистом. В 1914 г. после начала первой мировой войны, несмотря на частые переезды с места на место и многократные изменения в своем положении (за сравнительно короткий промежуток времени Штейнгауз успел побывать солдатом, служащим, математиком, работающим в

---

\* *Summa cum laude* (лат.) — с высшей похвалой.



промышленности, ассистентом и доцентом университета), Штейнгауз продолжал занятия математикой, встречался со своими коллегами и выступил инициатором ряда совместных работ. В 1916 г. Штейнгауз познакомился с гениальным самоучкой Стефаном Банахом, которого позднее называл своим самым крупным математическим открытием. Именно эти двое ученых и стали в последующие годы (Штейнгауз был профессором Львовского университета с 1920 г., Банах — с 1922 г.) создателями львовской математической школы, представители которой работали главным образом в области функционального анализа — нового раздела математики, или, если угодно, нового мощного математического метода. Тогда же Штейнгауз основал журнал, посвященный, различным проблемам функционального анализа. Позднее, получив результаты, которые ныне считаются классическими, он занялся другими проблемами, главным образом теорией вероятностей и прикладной математикой.

«На всем, о чем он говорил и писал, — отзывается о творчестве Гуго Штейнгауза Станислав Хартман, — лежал отпечаток его личности». Однако это обстоятельство отнюдь не облегчает попытку охарактеризовать творчество Штейнгауза, ибо его труды не поддаются ни упорядочению, ни хотя бы классификации.

Публикации Штейнгауза были чрезвычайно разнообразны по форме. Среди них многочисленны работы, предназначавшиеся для профессиональных математиков и опубликованные в специальных математических журналах. Если такая работа содержала идеи, которые можно было использовать в приложениях, то вокруг той же темы возникали статьи, предназначенные для специалистов в других областях знаний и опубликованные в медицинских, технических, географических и других журналах. Были популярные и полупопулярные статьи и книги, различные сборники задач, очерки по истории математики, статьи о значении отдельных математических и родственных дисциплин. Были работы, посвященные вопросам педагогики, выступления на торжественных собраниях в университетах и заседаниях ученых обществ, были характеристики и воспоминания об умерших математиках. Книг большего объема Штейнгауз написал две: монографию об ортогональных рядах (в соавторстве со Стефаном Качмажем) и «Математиче-

ский калейдоскоп» — самую популярную из популярных книг о математике, переведенную на несколько языков, книгу, не похожую ни на одну другую, которая поражает неистощимой изобретательностью, тонкостью, разнообразием тем, взятых из различных разделов математики и объединенных в единое целое, книгу, быть может, более характерную для Штейнгауза, чем все остальное.

Было бы неуместно подробно анализировать здесь математическое содержание творчества Штейнгауза, но мы не можем и, более того, не должны обходить молчанием особенности и основные идеи его творчества.

Одна из таких особенностей, ставшая в более поздние годы доминирующей в творчестве Штейнгауза, — это непрестанное стремление установить связь между математическими понятиями и окружающим миром. Математик, вращаясь в мире идеальных объектов (нередко определяемых им самим), пользуясь языком, созданным исключительно для описания таких объектов, все время испытывает искушение, подобно Бальзаку в известном анекдоте\*, приписать реальное существование продукту своих размышлений, а не их реально существующим прообразам, или «предкам». Штейнгауз боролся с таким подходом к математике, считая его «враждебным не только прикладной математике, но и пагубным для любой естественной науки. Это — идеалистический подход, называемый по имени того грека, который объединил культ философии с культом геометрии».

Штейнгауз очень обрадовался, когда я однажды показал ему стихотворение Норвида «Платон и Архит», в особенности его восхитила приписка поэта: «Идеализм Платона противостоял едва начавшей зарождаться тогда механике, считая ее свидетельством упадка чистого мирозерцания».

Одной, но отнюдь не единственной тенденцией в творчестве Штейнгауза, проистекающей из его принципиальных убеждений, было стремление расширить приложения математики к другим наукам и к повседневной

---

\* Прервав деловой разговор, великий писатель сказал своему собеседнику: «Все это прекрасно, мой дорогой, но обратимся снова к действительности: поговорим о Евгении Гранде».

жизни. Именно в области приложений Штейнгауз обладал особым талантом. Отсюда — различные практические изобретения. Отсюда — столь многочисленные работы, которые давали ответ на конкретные вопросы самых разных специалистов: биологов, медиков, антропологов, зоотехников, экономистов, инженеров и т. д. Отсюда и «обратная связь» — поиск областей применения готовых теоретических результатов.

Теоремы, не имевшие непосредственных приложений, Штейнгауз также стремился приблизить к действительности, пытаясь подыскать для них глубокую или хотя бы поверхностную аналогию, удачное название. Так, основную идею эргодической теоремы он объяснял на примере приготовления соуса майонез. Не менее известна его формулировка «теоремы о причесывании сферы». Эта фундаментальная теорема Брауэра в «Математическом калейдоскопе» звучит так: «Сферу, покрытую волосами, никогда нельзя причесать гладко: по крайней мере один волос всегда будет стоять дыбом». Математики всего мира знают другую теорему Штейнгауза — «теорему о сэндвиче». Автор сформулировал ее весьма образно: «Каждый сэндвич можно разделить одним плоским разрезом так, что хлеб, сыр и ветчина окажутся разделенными пополам».

К появлению «Калейдоскопа», по словам его автора, привело стремление сделать математику наглядной. Это стремление и вообще стремление к конкретизации математики пронизывает большую часть творческого наследия Штейнгауза. Именно отсюда проистекает тенденция к рассмотрению детерминистических моделей, однозначно определяющих развитие того или иного явления, и изгнанию из схемы явления «случая», «хаоса» и даже вероятности. Этой же тенденцией обусловлено и стремление Штейнгауза не выходить за пределы «конечных» (финитных) задач и методов даже там, где по традиции господствует инфинитный подход.

Штейнгауз не рассматривал математику как безошибочную дедуктивную систему или совокупность таких систем. Он понимал ее не как нечто идеальное, а как часть действительности, которая изменяется и развивается. Математическую строгость, признаваемую часто фундаментальной особенностью математики, Штейнгауз сравнивал с асептикой, которая служит

лишь одним из условий успешного исхода хирургической операции, но, как пишет сам Штейнгауз, «цель оперативного вмешательства и его характер определяются иными соображениями», у которых с нею мало общего.

С историческим взглядом на математику и математическую строгость, со стремлением к конкретности гармонически сочетались другие особенности творчества Штейнгауза, определяя его вкусы в выборе тематики. Можно сказать, что ученый не любил особенно развитых теорий с их тщательно разработанной терминологией, широко разветвленными понятиями и сложными логическими связями. Ему нравились теории в *statu nascendi*\*, проблематика которых была доступна пониманию всех математиков. Штейнгауз неоднократно выступал инициатором или одним из творцов теории, которую впоследствии развивали другие. Он обладал особым талантом — умением найти простые и важные, нередко элементарные, задачи, которые «просмотрели» специалисты, поглощенные своими более «высокими» проблемами. Так было, например, с некоторыми элементарными геометрическими фактами, впервые опубликованными лишь в «Калейдоскопе». Впоследствии они вошли во многие работы и книги по элементарной геометрии, хотя сам Штейнгауз этой областью математики никогда не занимался.

Решая прикладные математические задачи, Штейнгауз очень любил пользоваться элементарными средствами (впрочем, многие из его сотрудников не разделяли этого пристрастия своего руководителя). У Штейнгауза были излюбленные математические объекты, например куб, к которому он неоднократно возвращался в своих работах. О некоторых применениях куба говорится в «Калейдоскопе», другие неоднократно упоминаются в последующих работах Штейнгауза.

Все исследования Штейнгауза и форма изложения полученных им результатов отличаются изяществом, неизменно обеспечивавшим ему энтузиазм слушателей даже в аудитории, далекой от темы его очередного

---

\* *Statu nascendi* (лат.) — букв. в момент выделения, только появившиеся.

сообщения. И всегда, чем бы ни занимался Штейнгауз, его работе сопутствовало глубокое убеждение в мощи математического метода.

## НОВОЕ ВИНО В СТАРЫХ МЕХАХ

После второй мировой войны Гуго Штейнгауз стал одним из создателей нового польского научного центра во Вроцлаве. Ему было поручено организовать факультет математики, физики и химии, он же был и первым деканом этого факультета. Штейнгауз был также (хронологически) первым генеральным секретарем Вроцлавского научного общества, а впоследствии неоднократно избирался его председателем. Как ни обширен перечень обязанностей, которые Штейнгауз исполнял во вроцлавские годы жизни, но все же он недостаточно полно характеризует роль ученого в развитии Вроцлавского центра. Штейнгауз возглавлял одну из четырех существовавших в то время во Вроцлаве кафедр математики. Его стараниями удалось собрать во Вроцлав молодых математиков, профессоров и привлеченных творческой атмосферой центра ассистентов и учеников, которым Штейнгауз неизменно оказывал помощь и поддержку.

Атмосфера и темпы деятельности Штейнгауза и его коллег в тот период были лихорадочными. Люди науки, привыкшие к интенсивному интеллектуальному общению и обреченные в годы войны на одиночество и забвение, с радостью окунались в водоворот научной работы и совместного сотрудничества. Из заметок (а у Штейнгауза их было немало!) и глухих уголков памяти извлекалась масса идей и замыслов. Развиваясь и обретая новые детали, они излагались коллегам на многочисленных научных заседаниях. Сидеть в кафе было некогда, да и никто не замечал даже, что и самих-то кафе тогда не существовало.

У Штейнгауза появились многочисленные хлопотные общественные обязанности. Чтобы они не заслоняли научной жизни, ученый огласил и претворил в жизнь принцип, согласно которому каждое математическое заседание непременно содержало научную часть, какие бы важные организационные вопросы ни ожидали своего решения. В это же время Штейнгауз обязался в течение года на каждом математическом заседании ста-



вить новые научные проблемы. Свое обязательство он выполнил: большинство его задач собрано во «Вроцлавском сборнике математических задач» и опубликовано в разделе «Problèmes» журнала *Colloquium Mathematicum*. Они послужили темой многих математических работ в различных странах.

С самого основания «вроцлавских вторников» — семинара, известного под названием «реферативное обозрение», — Штейнгауз являлся их председателем. Вместе с автором настоящей статьи он руководил семинаром (собиравшимся по понедельникам) по теории функций действительного переменного и теории вероятностей (рассматривались в основном вопросы эргодической теории и теории случайных процессов). Семинар этот продолжает работать и поныне... Значительная часть работ, опубликованных его участниками, посвящена решению задач, предложенных Штейнгаузом. Он часто выступал с докладами на заседаниях Математического общества и лишь в 1945/46 учебном году прочитал 8 докладов.

Некоторые из полученных Штейнгаузом в то время результатов относились к прикладным задачам, часто возникали из работ, проводимых совместно со специалистами в различных областях науки, и докладывались в присутствии последних. С течением времени Штейнгауз все больше внимания уделял приложениям математики, втягивал в прикладные исследования все более широкий круг молодых математиков и создавал методы сотрудничества самых разных специалистов. Развивая старый и новый стиль таких «комбинированных» исследований, Штейнгауз пришел к убеждению, что их следует проводить «на органической основе, то есть при допущении специалистов к обсуждению генезиса, смысла и важности проблемы». И далее: «Сотрудничество следует начинать не с того момента, когда задача будет поставлена, а значительно раньше. Существуют задачи, которые представители естественных наук не считают математическими». Возможна и противоположная ситуация: в ряде задач математик иногда обнаруживает, что применение к ним сложных математических методов не обосновано. Так или иначе, математику необходимо затратить много сил и времени на начальном этапе совместной деятельности: не ждать, пока представители есте-

ственных наук найдут математическую формулировку задачи, а вместе с ними участвовать в поисках такой формулировки. По оценке Штейнгауза на неизбежные предварительные обсуждения конкретной задачи уходит не менее 50 часов. Математики-прикладники называли эту величину «числом Штейнгауза».

Помимо бесчисленных советов по обсуждению научных проблем со специалистами в различных областях знания, Штейнгауз учредил специальный «орган» для таких контактов — семинар по прикладной математике (1948 г.). По мысли создателя на этом семинаре должны были проводиться совместные обсуждения предлагаемых задач: приглашенные специалисты сообщают о возникающих у них задачах, а математики, являющиеся постоянными участниками семинара, формулируют подход и обсуждают проекты решений. Большая часть полученных результатов публиковалась на страницах журнала *Zastosowania Matematyki*, который Штейнгауз основал и редактировал на протяжении многих лет.

Невозможно перечислить всего сделанного ученым. Его работам, как правило, сопутствовал успех, хотя бывали и поражения. О том и другом Штейнгауз говорил в своих докладах и статьях.

Выступления Штейнгауза на различных заседаниях, а также по радио и телевидению, полные оригинальных идей, неожиданных ассоциаций, удивительно емких и точных формулировок, всегда отличались широким кругозором, богатством и разнообразием информации и на протяжении четверти века украшали интеллектуальную жизнь Вроцлава.

В своих выступлениях Штейнгауз неоднократно затрагивал проблему места математики среди других наук. Вот, например, отрывок из его блестящего выступления «Математика вчера и сегодня» на торжествах по случаю начала 1958/59 учебного года.

Современные вычислительные машины служат одним из примеров того, какое существенное влияние на развитие математики, точнее, на направление, в котором развиваются математические идеи, оказывает техника. Правда, этот пример имеет единственный недостаток, напоминающий нам о том, что в биологии является правилом: помощь, оказываемая математику вычислительными машинами, — это помощь извне, помощь со стороны аппаратуры. Математика же развивается по своим собственным, автономным законам ... прогресс математики

происходит совсем иначе, чем прогресс естественных и гуманитарных наук. Математика развивается по восходящей линии, минуя все заторы, ее развитие схоже с развитием живого организма. К тому же в математике несравненно явственней, чем в других дисциплинах ощущается, насколько растянуто шествие всего человечества. Среди наших современников есть люди, чьи познания в математике относятся к эпохе более древней, чем египетские пирамиды, и они составляют значительное большинство. Математические познания незначительной части людей дошли до эпохи средних веков, а уровня математики XVIII века не достигает и один человек на тысячу... Но расстояние между теми, кто идет в авангарде, и необозримой массой путников все возрастает, процессия растягивается и идущие впереди отдаляются все более и более. Они скрываются из виду, их мало кто знает, о них рассказывают удивительнейшие истории. Находятся и такие, кто просто не верит в их существование.

Обширна и разнообразна была педагогическая деятельность Штейнгауза в университете. Она отнюдь не ограничивалась официальными лекциями и семинарами. Штейнгауз часто беседовал с молодежью, и не только отвечал на многочисленные вопросы, но и ставил их. Некоторые вопросы, выписанные на отдельных карточках, он вывешивал на шкафу в помещении кафедры математики.

Штейнгауз считал, что лекции для начинающих студентов должны читать опытные профессора, а не молодые научные работники. Соответствующее постановление было принято по его инициативе ученым советом Вроцлавского университета в 1957 г.

Время от времени Штейнгауз проводил у себя дома нечто вроде неофициального научного семинара. Около 1950 г. он организовал цикл дискуссий по книге Винера о кибернетике, а спустя несколько лет — как бы по контрасту с первым — другой цикл, посвященный одной из важнейших проблем оснований математики. Отношение Штейнгауза к «основаниям» (как для краткости говорят математики) было особым: исследованиями в этой области математики он занимался неохотно, но в то же время некоторые ее проблемы беспокоили и интересовали его. Можно сказать, что в основаниях математики он одновременно был и неспециалистом, и творцом. В 1961 г. идеи теории игр привели Штейнгауза к формулировке (совместно с Яном Мыцельским) новой аксиомы, которую он назвал аксиомой детерминации. Эта

аксиома и поныне служит предметом оживленных исследований в различных странах. Аксиома детерминации, по-видимому, наиболее известное из послевоенных достижений Штейнгауза. Может показаться иронией судьбы, что именно в период, когда ученый особенно много внимания уделял прикладным задачам, наибольшую известность приобрел его результат, носящий чисто теоретический характер. Но парадокс здесь лишь кажущийся, ибо и в аксиоме детерминации заключена основная идея творчества Штейнгауза: сближение математики с реальным миром. Аксиома Штейнгауза изгоняет из математики уродливые объекты, существование которых противоречит геометрической интуиции. Я уверен, что эту аксиому ожидает интересное будущее.

Роль Гуго Штейнгауза как ученого и педагога, его гуманитарная культура и независимость взглядов снискали ему огромный авторитет и широкое признание. Во Вроцлаве неоднократно и по разному поводу чествовали ученого. Вот два достаточно ярких эпизода.

В 1951 г. праздновали 40-летие научной деятельности Штейнгауза. Штейнгауз, выступая с ответным словом, произнес прекрасную речь, в которой поблагодарил сотрудников и молодежь. Свою речь он закончил так (цитирую по памяти): «Благодарю всех присутствующих, а поскольку я не могу выразить свою признательность каждому, то делаю это символически» — и поцеловал руку своей жене.

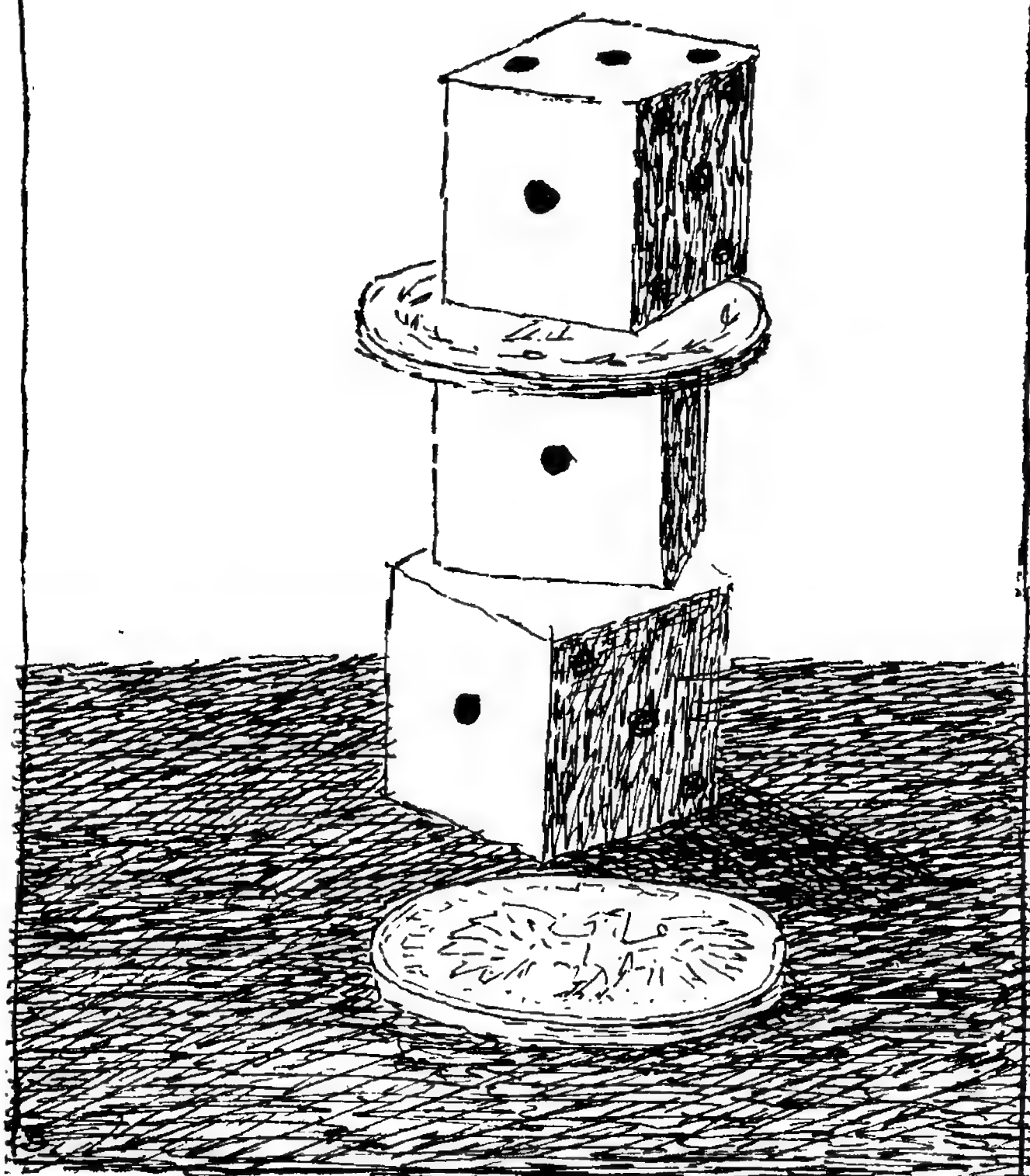
Во время празднования 20-летия польских вузов во Вроцлаве (1965 г.) Гуго Штейнгауз стал почетным доктором Вроцлавского университета. Вот фрагмент из речи промотора\*: «Во всей Вашей деятельности во Вроцлаве нет границ между математическими дисциплинами, нет границ между математикой и другими науками, нет границ между наукой и окружающим нас миром».

Гуго Штейнгауз умер во Вроцлаве 25 февраля 1972 г.

---

\* Лицо, представляющее кандидата ученому совету.

# ОРЕЛ ИЛИ РЕШКА?





Играть в эту игру лучше всего на столе, под ножки которого подстелен ковер. Поставив монету в 1 золотый ребром на стол, запустим ее волчком. Быстро вращаясь, монета начнет перемещаться по столу, дойдет до края и упадет на ковер либо вверх, либо вниз орлом. Ту сторону монеты, на которой нет орла, мы будем называть решкой (есть такое старое, неизвестно откуда взявшееся слово).

Уговоримся с партнером, что он загадывает, как упадет монета на ковер — вверх орлом или вверх решкой, а мы запускаем ее. Всякий раз, когда предсказание партнера сбывается, он получает от нас один золотый. Если монета его «не слушается», партнер платит один золотый нам.

Предвидеть заранее, какой стороной вверх упадет монета, в этой игре нельзя. Если бы наш противник был способен делать точные предсказания, он бы всегда выигрывал. Если бы мы умели так запускать монету, чтобы она падала по нашему желанию, то любой, кто вздумал бы с нами играть, был бы обречен на проигрыш. Стоило бы ему загадать, что монета упадет вверх орлом, как мы запустили бы ее так, чтобы она упала вверх решкой, а если бы он загадал решку, то мы запустили бы монету «на орла».

Разумеется, запускающий монету партнер как-то влияет на исход бросания, и могло бы показаться, что ему

легче, чем противнику, предвидеть, какой стороной вверх она упадет. Но и запускающий монету тоже не знает, какой стороной она упадет на ковер, а какая окажется сверху. Действительно, прежде чем упасть, монета совершает множество оборотов и доходит до края стола. Если мы хотим, чтобы в этот момент монета была обращена к нам орлом, то и запускать ее следует так, чтобы она совершила нужное число оборотов. Для этого необходимо было бы с точностью до тысячных долей регулировать скорость вращения монеты и управлять выбором ее пути по поверхности стола, причем в этом случае точность момента, когда монета достигает края стола, должна отличаться от требуемой не более, чем на сотую долю секунды. Но и все это нам не очень бы помогло, поскольку монета падает со стола на пол ребром и катится по ковру. Поэтому из того, какое положение она занимала на краю стола, еще нельзя заключить, какой стороной вверх она упадет. Впрочем, кто не верит, пусть попробует!

Игра будет совсем иной, если бросаний («запусков») будет не одно, а больше, например десять или сто. Вот результаты 100 бросаний монеты:

*ROORRRRRRRROOOORROROR*  
*OROROOROOOROOOROOOOOR*  
*OOOORRROROROOOOOOOOOOR* (1)  
*ORORORORRRROOROOORORR*  
*RRORRRORRRRRORRRORORO*

Подсчитаем, сколько выпало орлов ( $O$ ) и сколько — решек ( $P$ ). В первой серии из двадцати бросаний было восемь  $O$  и двенадцать  $P$ , во второй — четырнадцать  $O$  и шесть  $P$ , в третьей — пятнадцать  $O$  и пять  $P$ , в четвертой — десять  $O$  и десять  $P$  и в пятой — восемь  $O$  и двенадцать  $P$ . Всего из 100 бросаний орел выпал 55 и решка 45 раз. Обратим внимание на то, что доля орлов была:

Серия из 20 бросаний	%
Первая	40
Вторая	70
Третья	75
Четвертая	50
Пятая	40
Во всех 100 бросаниях	55



Разделим каждую серию на две меньших серии по 10 бросаний каждая. Тогда доля орлов составит:

Серия из 10 бросаний	%
Первая	20
Вторая	60
Третья	70
Четвертая	70
Пятая	60
Шестая	90
Седьмая	40
Восьмая	60
Девятая	30
Десятая	50

Десятки можно было бы разбить на пятерки (читателю, если он захочет, предоставляется проделать это самостоятельно). Мы же обратим внимание лишь на то, что во второй серии из пяти бросаний доля орлов составляет 0%, а в одиннадцатой — 100%. Следовательно, в сериях из пяти бросаний доля орлов колеблется от 0 до 100%, в сериях из десяти бросаний — от 20 до 90% и в сериях из двадцати бросаний — от 45 до 90%. Мы видим, что колебания уменьшаются, если от более коротких серий переходить к более длинным. Мы на-

щупали некую закономерность, но еще не можем ее сформулировать. Что произойдет, если мы перейдем к сериям из сотен, а затем из тысяч бросаний? Первым, кто попробовал играть в орла и решку с большим числом бросаний, был выдающийся французский естествоиспытатель Ж. Л. Бюффон (1707—1788). В 4040 бросаниях орел выпал 2048 раз. Если пределы, в которых колеблется доля орлов, сближаются, то эта доля с увеличением числа бросаний должна стремиться к какому-то вполне определенному числу, но к какому? Доля орлов (для моего злотора, которого я опробовал на серии из 100 бросаний) могла бы стремиться к 0,6. Что это означало бы? Доля решек в исходах бросаний стремилась бы к 0,4. В этом случае каждый сказал бы, что монета чаще падает вверх орлом. Такое вполне возможно: если металл, из которого отчеканена монета, неоднороден и более плотен со стороны решки, то монета чаще будет падать вверх орлом, чем решкой. Однако если монета сделана из однородного металла и совершенно одинакова с обеих сторон (неровности рисунка могут влиять на исход бросания, поэтому лучше пользоваться гладкой «монетой»), то она будет падать одинаково часто и вверх орлом, и вверх решкой. Это вовсе не означает, что в каждой серии из десяти бросаний орел будет выпадать 5 раз. Исходы бросаний будут распределяться в кажущемся беспорядке, и лишь после того, как их наберется достаточно много, мы увидим, что доля бросаний, при которых выпадает орел, приближается к 0,5. Такая доля орлов свидетельствует о симметрии монеты. В этом и заключается закон больших чисел.

### ЗАКОН БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ

Об этом законе писали и говорили очень много. Тем не менее гораздо чаще вы можете услышать о нем совершеннейшие нелепости, чем что-нибудь разумное. Есть, например, люди, которые понимают закон больших чисел так. Если существует закон, по которому доля орлов должна стремиться к 0,5, то всякий раз, когда подряд выпадает много орлов, чтобы компенсировать их перевес, непременно должно выпасть много решек. Увидев, что монета несколько раз выпала вверх

# 3798415

орлом, такие люди при следующем бросании непременно загадывают решку. Проверим, так ли это. Подсчитаем, сколько раз в нашей серии из ста бросаний после двух *O* встречается *P*. Один раз группа *OOR* встречается в самом начале серии (при втором и третьем бросании выпали *O*, при четвертом — *P*), еще один раз — в первых двадцати бросаниях, во второй серии из двадцати бросаний группа *OOR* встречается 3, в третьей — 2, в четвертой — 3, в пятой — 2 раза, всего — 12 раз. А сколько раз после двух *O* выпадает снова *O*? 15 раз! Что-то предсказания «мудрых» людей не всегда сбываются. Но, может быть, монета падает так «неправильно» только в нашей серии из 100 бросаний, а если число бросаний больше, то она, «набравшись разума», поведет себя иначе? Ведь должна же она «подчиняться» закону больших чисел! Монета и в самом деле подчиняется закону больших чисел, но делает это на свой манер: для выравнивания числа бросаний, в которых выпадают орел и решка, вовсе не обязательно, чтобы после двух *O* решка выпадала чаще, чем орел.

Запишем следующую серию бросаний:

```

OOOOORRRRROOOOORRRRROOOOORRRRR
OOOOO
RRRRROOOOORRRRROOOOORRRRROOOOO
RRRRR
OOOOORRRRROOOOORRRRROOOOORRRRR...
    
```

(2)

Вот здесь уже орел после двух орлов выпадает чаще, чем решка: 30 раз после *OO* встречается *O* и лишь 10 раз *P*. Доля орлов стремится к 0,5 (доля решек — тоже). Правда, в 5 первых бросаниях выпадают лишь одни орлы, в серии из 15 первых бросаний доля орлов составляет  $\frac{2}{3}$ , а в серии из 25 первых бросаний



орлы выпадают лишь в  $\frac{3}{5}$  всех исходов и т. д. Более точно:

Число первых бросаний	Доля орлов составляет
5 . . . . .	1
10 . . . . .	0,5
15 . . . . .	0,666
20 . . . . .	0,5
25 . . . . .	0,6
30 . . . . .	0,571
40 . . . . .	0,5
95 . . . . .	0,526 ...

После первых 25 бросаний доля орлов уже никогда не достигает 60%, после 35 бросаний становится меньше 57%, а после 92 бросаний не превышает 52%, если серию бросаний продолжать и дальше, чередуя 5 орлов и 5 решек. Правда, где бы мы ни оборвали нашу серию, доля орлов всегда будет больше, а доля решек — меньше  $\frac{1}{2}$ . Но закон больших чисел остается в силе, как и для симметричной монеты, и обе доли стремятся к  $\frac{1}{2}$ , хотя выравнивание числа бросаний, в которых монета падает вверх орлом и вверх решкой, происходит иначе, чем предсказывали мудрые люди. Действительно, в нашей серии орел после двух орлов встречается втрое чаще, чем решка. В целом в серии из ста бросаний  $P$  после  $O$  встречается 10 раз,  $O$  после  $P$  — 9 раз,  $O$  после  $O$  — 40 раз и  $P$  после  $P$  — тоже 40 раз. Таким образом, при очередном бросании монета 19 раз падает другой стороной вверх и 80 раз — той же стороной вверх, что и в предыдущем случае. Если бы монета «вела себя» так, как следует из нашей серии, то после выпавшего орла, мы уверенно загадывали бы орла, а после выпавшей решки — решку. И действительно, есть на свете и такие мудрецы, которые верят в этот закон и называют его «законом серии». Они полагают, что если несколько раз подряд выпал орел, то ставить нужно на него (то есть считать, что при следующем бросании выпадет снова орел), по их мнению, также стоит поступать и после выпавшей несколько раз подряд решки, поскольку монета «не любит перемен». Проверим «закон серии» на исходах (1) действительно проверенных бросаний (исходы (2) вымышлены). В серии бросаний (1) 50 раз орел сменяется решкой, а решка — орлом и

49 раз монета выпадает той же стороной вверх, что и в предыдущем бросании.

Короче говоря, монета не обладает памятью, и вся ее предшествующая история — последовательность, в которой выпадали орлы и решки, — никак не сказывается на исходе очередного бросания. Это вполне очевидно: можно ли представить себе, чтобы кто-нибудь, сев за карточный стол, спрашивал у хозяина карточной колоды, какие «привычки» у его карт? При игре в орла и решку также не поможет ни одна система, ибо ни «закона серии», ни «закона чередования» просто не существует. Но как же в таком случае обосновать закон больших чисел? Попробуем сделать это, попросив читателя быть чуть внимательнее, чем прежде.

Сколько возможных исходов имеют два последовательных бросания монеты? Их 4, а именно:

*ОО, ОР, РО, РР.*

Монета симметрична, значит, появление *О* при первом бросании столь же возможно, сколь и появление *Р*. Следовательно, серия из двух бросаний, начинающаяся с *О*, так же вероятна, как и серия, начинающаяся с *Р*. Итак, бросив монету два раза подряд, мы получим *ОО* или *ОР* с такой же вероятностью, как и *РО* или *РР*. Однако после того, как выпал *О*, для монеты, не имеющей памяти, выбор между *О* и *Р* при следующем бросании безразличен: *ОО* имеет такие же шансы, как и *ОР* (аналогично серия *РО* имеет одинаковые шансы на появление с серией *РР*). Следовательно, каждый из четырех возможных исходов двух бросаний имеет одну и ту же вероятность. Чему равна доля орлов в каждом исходе? Соответственно, 100, 50, 50 и 0%. Закон больших чисел здесь еще не виден, но мы исследовали лишь серии из двух бросаний. А что произойдет при четырех бросаниях? Выпишем все возможные исходы:

*ОООО, ОООР, ООРО, ООРР, ОРОО, ОРОР,*

*ОРРО, ОРРР, РООО, РООР, РОРО, РОРР,*

*РРОО, РРОР, РРРО, РРРР.*

Их 16, и каждый из них так же возможен, как и любой другой. Доля орлов составляет в них соответственно 100, 75, 75, 50, 75, 50, 50, 25, 75, 50, 50, 25, 50, 25, 25, 0%.

В шести сериях доля орлов равна 50, в четырех — 75, в четырех других — 25, в одной серии — 100 и в одной — 0%. Следовательно, если нам понадобится предсказать долю орлов в серии из четырех бросаний — будет ли она составлять 0, 25, 50, 75 или 100%, — то лучше всего назвать 50%, поскольку эту возможность монета может осуществить шестью различными способами. Если же от нас не ждут точного предсказания, а лишь спрашивают, будет ли доля орлов заключена в интервале от 25 до 75% или нет, то превратиться в пророка еще легче, поскольку в этом интервале доля орлов оказывается в 14, а вне его — лишь в 2 случаях. Пойдем еще дальше: спросим, сколько возможных исходов имеется при 10 последовательных бросаниях монеты. Нетрудно понять, что при двух бросаниях число возможных исходов равно  $2^2=4$ , при трех —  $2^3=8$ , при десяти —  $2^{10}=1024$ . Мы не будем выписывать их, а лишь сообщим, сколько из них соответствуют той или иной доле орлов.

Доля орлов в %	Доля решек в %	Число исходов
0	100	1
10	90	10
20	80	45
30	70	120
40	60	210
50	50	252
60	40	210
70	30	120
80	20	45
90	10	10
100	0	1

Всего 1024 исхода

В каком числе серий из 4 бросаний доля орлов заключена в интервале от 40 до 60%? Таких серий  $210+252+210=672$ , а всех исходов 1024, поэтому дробь  $672/1024$  равна вероятности того, что при 10 бросаниях доля орлов будет заключена между 40 и 60%. Но нижняя граница 40% и верхняя — 60% означают, что

отклонение доли орлов от 50% не превышает 10%. Следовательно, мы можем утверждать, что с вероятностью около 65% отклонение доли орлов от 50% не превышает 10%. Тот же расчет можно было бы провести и для серии из 100 бросаний, тогда оказалось бы, что с вероятностью около 65% отклонение доли орлов от 50% не превышает 5%. Чем длиннее будут серии, тем меньшее отклонение от 50% мы сможем предсказывать с вероятностью 65%. Но нам вовсе не обязательно держаться за эту цифру — 65%. Для серии из 100 бросаний с вероятностью почти 90% отклонение доли орлов от  $\frac{1}{2}$  не превышает 9%, при 10 000 бросаний с вероятностью около 90% отклонение от  $\frac{1}{2}$  не превышает 1%. Так с помощью вычислений мы подошли к закону больших чисел. С вероятностью сколь угодно близкой к 1 (но неравной ей — это была бы уже достоверность), например с вероятностью 99%, можно предсказать, что доля орлов будет сколь угодно мало отличаться от  $\frac{1}{2}$  (например, отклонение может составлять 1%, то есть доля орлов будет заключена между 49 и 51%), если потребовать, чтобы серия бросаний была достаточно длинной. Найти число бросаний, при котором отклонение с заданной вероятностью (например, с вероятностью 99%) не выходит за пределы указанного заранее доверительного интервала (например, не превышает 1%), можно с помощью специальных вычислений. При длинных сериях такие вычисления становятся весьма трудными, если мы хотим ограничиться четырьмя арифметическими действиями. Но в высшей математике способ определения числа бросаний упрощается, и это имеет важное практическое значение.

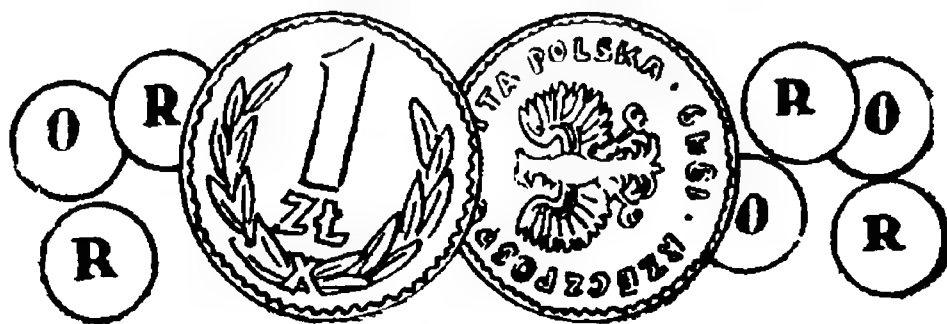
Автомат, штампующий стальные перья, время от времени производит брак. Торговая организация, которая занимается распределением перьев по магазинам канцелярских принадлежностей, жалуется, что 10% перьев не пишут. «Если это правда, — рассуждает директор фабрики, — то на 1000 выпущенных нами перьев 100 должны быть плохими. Из ящика, в который автомат выбрасывает отштампованные перья, директор выбирает наугад 1000 штук и, осмотрев их по очереди, обнаруживает 91 бракованное перо. Что говорит закон больших чисел? А то, что автомат, выпускающий пло-



хое перо с вероятностью  $\frac{1}{10}$  (именно такую цифру называли представители торгующей организации), с вероятностью 84% производит больше, чем 91 плохое перо на 1000. Вероятность эта достаточно велика, и поэтому рассуждать можно так. Если правы представители торгующей организации, то в серии из тысячи штук плохих перьев должно быть больше, чем 91. Но поскольку их оказалось лишь 91, то представители торговли преувеличивают процент брака, однако не слишком: как показала проверка, на 11 выпущенных автоматом перьев приходится 1 плохое, что совсем не существенно отличается от  $\frac{1}{10}$ . Уязвленная гордость не позволила директору удовлетвориться этим элементарным подсчетом, и он обратился к математику с вопросом, как должен работать автомат, чтобы с вероятностью 95% гарантировать выпуск не более 10 плохих перьев на 1000? Математик ответил, что для этого на 1000 перьев брак не должен превышать 5 штук. Не следует удивляться такому ответу: автомат, который выпускает 10 плохих перьев на 1000, с вероятностью 58% выдаст при испытании не менее 10 плохих перьев. Чтобы гарантировать, как требует директор фабрики, вероятность 95%, необходим автомат, работающий вдвое лучше. Ясно, что этот пример — лишь один из многих, встречающихся в промышленности и технике, сельском хозяйстве и торговле.



Но вернемся к орлу и решке. Чтобы играть в орла и решку, вовсе не обязательно бросать монету или запускать ее волчком. Есть такая игра — чет и нечет. Я кладу на стол монету в 1 злотый и закрываю ее ладонью так, чтобы мой противник не видел, какой стороной она обращена кверху. После этого он кладет на стол свой злотый, а я открываю монету. Если обе монеты лежат вверх орлами или вверх решками (то есть либо *ОО*, либо *РР*), то мой противник забирает обе монеты себе. Если же одна монета лежит вверх орлом, а другая — вверх решкой, то владельцем монеты становлюсь я. Вполне очевидно, что отгадать, какой стороной кверху обращена монета под ладонью, трудно, но взрослый человек, играя против ребенка, уже после нескольких попыток начнет систематически выигрывать. Дело в том, что ребенок, положив монету вверх орлом и проиграв, в следующий раз положит монету вверх решкой, а взрослый сразу же постигнет эту наивную тактику. Кроме того, по выражению лица ребенка легко догадаться о его намерениях. Существует ли способ спасти ребенка от проигрыша? Можно ли научить его играть так, чтобы свести на нет хитрость взрослого игрока? Можно, причем сделать это очень нетрудно. Если ребенок при игре в чет и нечет ходит вторым, то пусть он не кладет монету на стол, а запускает ее волчком. Если же ребенок ходит первым, то ему следует запустить монету волчком и накрыть ее ладонью так, чтобы он сам не видел, какой стороной кверху легла монета. Что произойдет при этом? Шансы, что монета под рукой у ребенка лежит вверх орлом или вверх решкой, станут одинаковыми — 50% для орла и 50% для решки. Положив монету вверх орлом, взрослый противник может с вероятностью 50% выиграть и с той же вероятностью 50% проиграть. То же самое произойдет, если он положит на стол монету вверх решкой.



Следовательно, какой бы ход ни сделал противник, ребенок с вероятностью 50% выиграет, причем выигрывать будет так же часто, как и его взрослый партнер.

Кто же лучше всех на свете умеет играть в чет и нечет? Вот что пишет по этому поводу один из создателей современной теории автоматов К. Э. Шеннон:

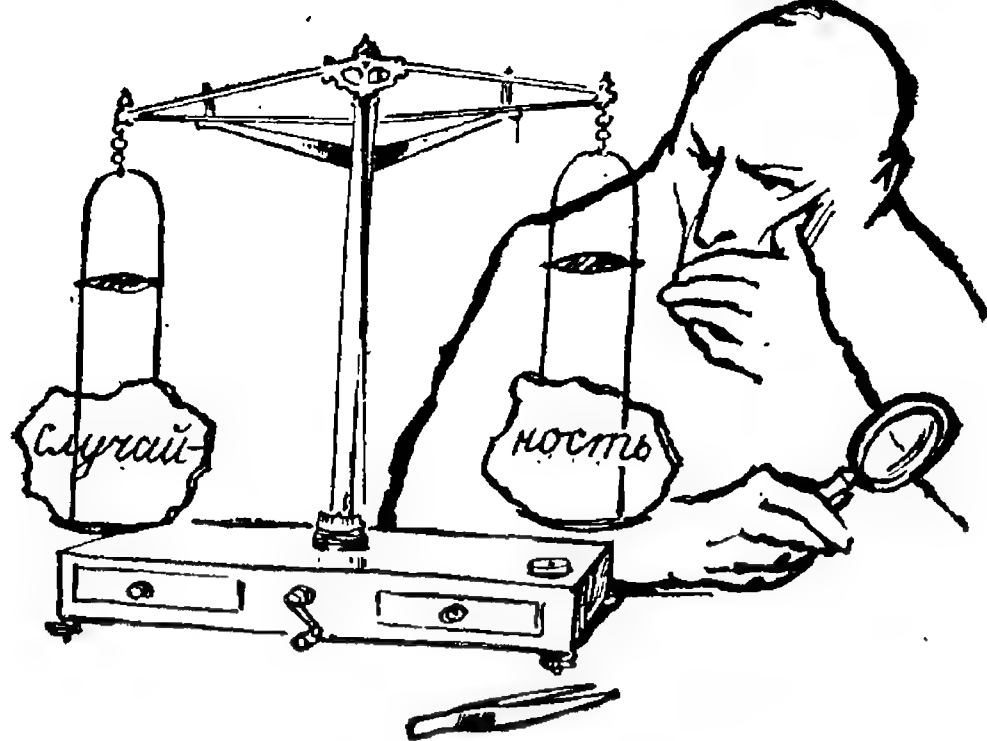
...Другой тип обучающейся машины сконструировал Д. В. Хагельбарджер. Это автомат, предназначенный для игры в чет и нечет против живого партнера. Спереди на панели автомата имеются пусковая кнопка, два окошка с надписями «орел» на одном и «решка» на другом и рычажок, который может находиться в двух положениях: «орел» и «решка». Человек кладет монету на стол (так, чтобы ее видел арбитр), после чего нажимает пусковую кнопку. Машина «отвечает», зажигая лампочку в одном из окошек. Если надпись над ним совпадает с названием той стороны монеты, которая обращена вверх, выигрывает машина, если не совпадает — человек. Поворотом рукоятки в положение, соответствующее верхней стороне монеты, арбитр уведомляет машину о каждом исходе игры. Автомат использует накопленный опыт. Некоторые имеют обыкновение, выиграв два раза подряд на орла, в третий раз ставить на решку. Пока автомат не замечает такой склонности, он делает случайные ходы. Но если только автомат обнаруживает в них какую-то систему, он тут же обращает ее против человека, используя сведения, накопленные во время игры с ним. Автомат выигрывает от 55 до 60% партий, что свидетельствует о неумении человека сознательно производить случайные ходы. Еще труднее человеку «надуть» автомат, играя то по одной, то по другой системе. Для игры в чет и нечет был построен еще и автомат иной конструкции — он быстрее обучался, но имел меньший объем памяти. Строгий математический анализ того, какой из двух автоматов играет лучше, чрезвычайно сложен, поэтому было решено провести публичное состязание, которое продолжалось 4 часа. В качестве арбитра на этот раз выступал также автомат. Это позволило провести несколько тысяч партий. Оказалось, что новый автомат систематически одерживает победу над старым со средним счетом 55 : 45 ...

Мы уже говорили о том, что для игры в орла и решку необходимы симметричные монеты. Но таких монет не существует, ибо стороны любой монеты отличаются рисунком. Вместо монеты можно использовать игральные карты: тасовать колоду, на ощупь вытягивать из нее карту, выкладывать эту карту на стол вниз рубашкой, снова тасовать колоду и вытягивать из нее вторую карту. Красная масть соответствовала бы, скажем орлу, черная — решке. Однако оказалось, что тасовка карты не позволяет перемешать карты настолько,

чтобы мы могли говорить об их случайном расположении в колоде. Поэтому пришлось придумывать другие способы имитации идеальной монеты.

## СЛУЧАЙНЫЕ ЧИСЛА

На практике более важную роль, чем последовательность орлов и решек, играет последовательность чисел 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, которая возникает, если мы бросаем, словно игральную кость, десятигранник, на каждой из боковых граней которого написано по одному из этих чисел. Как образовать такую последовательность чисел, чтобы никто не мог упрекнуть нас в том, что мы влияем на исход бросания и тем самым нарушаем принцип равноправия всех 10 цифр? Пробовали брать номера из телефонной книги: раскрыв ее наугад, выписывали цифры в том порядке, в каком они там встречаются. Оказалось, что этот способ не слишком хорош: в телефонных номерах обнаруживаются систематические отклонения от случайности. Тогда попробовали поступать иначе. Взяли 10 цифр от 0 до 9, разместили их на диске, как часовые деления на циферблате часов, поместили диск за экраном с окошком и заставили быстро вращаться (с помощью электрического моторчика). Все устройство поместили в темную комнату и время от времени освещали электрической искрой, а цифру, которая в этот миг виднелась в окошке, записывали. Так удалось получить тысячи и тысячи случайных цифр. Но нашлись люди, которым и этого было мало: они заявили, что ритм руки, нажимающей на ключ разрядника, и скорость вращения диска имеют соизмеримые периоды, а это порождает какие-то закономерности в последовательности появляющихся в окошке цифр. Тогда решили заменить человека автоматом, а именно так называемым счетчиком Гейгера — Мюллера. «Автомат» этот очень прост — это всего лишь стеклянная трубка с окошком, закрытым слюдой, которая наполнена сильно разреженным газом. Трубка эта служит прерывателем электрического тока и пропускает его лишь в том случае, если в нее попадает частица материи, например частицы, испускаемые радием или прилетающие к нам на Землю с так называемым космическим излучением. Ток внутри трубки



очень слаб и длится неуловимо короткий промежуток времени, но его можно усилить, как усиливают с помощью электронных ламп сигнал, принятый радиоантенной, и, пропустив через разрядник, получить искры. Теперь наше устройство будет делать все без вмешательства человека. Цифры можно фотографировать на движущейся пленке и по прошествии достаточно большого промежутка времени записать их сотнями тысяч. Всех ли удовлетворит такой способ получения случайных чисел? Нет, ибо размещение цифр на диске не совсем равномерно. Возникла идея воспользоваться десятью счетчиками Гейгера — Мюллера, соединенными с пишущим устройством. Если космическая частица попадает в счетчик номер 5, то ток проходит через электромагнит, приводящий в движение клавишу с цифрой 5. Так же обстоит дело и с другими счетчиками: каждый счетчик соединен через электромагнит и клавишу со своей цифрой. Но и тут нашлись придиры, которые не поверили в то, что можно собрать 10 совершенно одинаковых счетчиков Гейгера — Мюллера, а это очень существенный момент: ведь если у счетчика номер 5 окошко, закрытое слюдой, шире, чем у счетчика номер 7, то он будет чаще реагировать на космические частицы, чем счетчик с меньшим окошком, и на бумажной ленте, протягиваемой через пишущее устройство, пятерка будет появляться чаще, чем семерка, а мы хотим сохранить закон больших чисел с одинаковой

частотой для каждой цифры! Группе вроцлавских математиков и физиков удалось обойти эту трудность.

Возьмем обычную монету в 1 злотый. Мы не знаем, насколько она отличается от идеально симметричной. Например, может оказаться, что рисунок «орла» имеет больше элементов, чем рисунок «решки», а это уже не может не влиять на исход бросания, давая преимущество одной стороне монеты перед другой. Предположим поэтому, что монета несимметрична и что орел выпадает чаще, чем решка. Почему так происходит, мы не знаем, но это нам не мешает. Будем всегда бросать монету два раза подряд и записывать исходы бросаний особым образом:

*ОР* запишем как *O*,  
*РО* запишем как *P*,  
*ОО* вообще не станем записывать,  
*РР* также не станем записывать.

Например, если исходы бросаний окажутся такими:  
*ОР, РО, ОР, РР, РО, ОР, ОО, ОР, РО, ОР, ОО, РО, РР, ОР,*  
то мы запишем их в виде

*O, P, O, P, O, O, P, O, P, O.*

Теперь монета ведет себя так, как если бы она была идеально симметричной. Читатель, наверное, уже понял, что эта игра в орла и решку ведется «честно», поскольку даже у несимметричной монеты последовательность бросаний *ОР* встречается так же часто, как и последовательность *РО*: монете ничего не известно о ходе времени и для нее нет никакой разницы между последовательностью *ОР* и последовательностью *РО*. Этот способ получил название симметризации монеты. Его можно применить и к устройству с десятью счетчиками Гейгера — Мюллера. Представим себе 10 счетчиков, связанных с пишущим устройством так, что линия связи отпирается на очень короткий промежуток времени (например, на  $\frac{1}{10}$  с), затем запирается, снова отпирается и т. д. Если за то время, в течение которого линия связи отпирается, все счетчики сработают лишь по одному разу, то печатающее устройство выдаст цифру, соответствующую последнему счетчику (и только ему). Если какой-нибудь счетчик сработает дважды, то связь прервется.



Такое устройство уже симметризовано: каждая цифра от 0 до 9 имеет одинаковые шансы быть напечатанной даже в том случае, если счетчики Гейгера — Мюллера и не совсем одинаковы. В течение очень большого числа периодов, когда линия связи отпирается, записывающее устройство не выдаст на печать ни одной цифры, но это не причиняет особого вреда, поскольку устройство для отпираания и замыкания тока — электронное (как лампы в радиоприемнике), а не механическое (как в электрическом звонке). Электронные устройства срабатывают с неуловимой быстротой. Следовательно, подобрав достаточно чувствительные счетчики Гейгера — Мюллера, можно добиться, чтобы в «рабочие» периоды печатающее устройство выдавало на печать, например, в среднем 1 цифру в секунду.

Очень интересен вопрос о том, обязательно ли прибегать к столь сложным способам для получения случайной последовательности цифр. Нельзя ли обойтись без бросания монет и хитроумных устройств? Попробуем, например, построить такую последовательность, начав ее с чисел 2 и 5 и продолжив следующим образом:

$$2, 5, 2 + 5 = 7, 5 + 7 = 12, 7 + 1 = 8, \dots$$

При вычислении каждой суммы следует помнить, откуда она берется, и например, 12 рассматривать как написанные подряд единицу и двойку, и не одно двузначное число «двенадцать». Продолжая последовательность, мы должны к предыдущей цифре прибавить единицу ( $7 + 1 = 8$ ), а к полученной сумме — двойку ( $8 + 2 = 10$ ) и т. д. В результате мы получаем последовательность цифр

$$\begin{aligned} 2, 5, 7, 1, 2, 8, 3, 1, 0, 1, 1, 4, 1, 1, 2, 5, 5, 2, 3, \\ 7, 1, 0, 7, 5, 1, 0, 8, 1, 7, 1, 2, 6, \dots \end{aligned} \quad (3)$$

Рецепт получения такой последовательности очень прост, и нам было бы весьма выгодно пользоваться им, а не вращающимися дисками, фотоаппаратами, электронными лампами и другими сложными устройствами. Но, к сожалению, этого рецепта нельзя рекомендовать читателю.

Выясним, каким требованиям должна удовлетворять последовательность, чтобы ее можно было назвать случайной. Прежде всего, различные цифры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 должны встречаться в последовательности

одинаково часто. Но этого еще не достаточно: мы хотим, чтобы все группы из двух цифр также встречались в нашей последовательности одинаково часто. Какие пары цифр встречаются в последовательности (3)? Перечислим их: 25, 57, 71, 12, 28, 83, 31, 10, 01, 11, 14, 41, 11, 12,... А какие пары вообще возможны? Их всего сто: 00, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09, 10, 11, 12, 13,..., 20, 21,..., 98, 99. При нашем способе образования последовательности (3) каждая встречающаяся в ней пара цифр (парой мы считаем только соседние цифры) снова порождает либо одно-, либо двузначное число. Нетрудно составить таблицу сложения (так же, как обычно составляют таблицу умножения) и выписать все возможные суммы цифр от 0 до 9. Таких сумм 100, среди них 45 двузначных и 55 однозначных. Следовательно, если слагаемые написать слева и сверху от квадратной рамки, то внутри нее окажется  $90 + 55 = 145$  цифр. Нетрудно подсчитать также, сколько среди них будет единиц: 55. Следовательно, если все пары встречаются в последовательности (3) с одинаковой частотой, то среди их потомства в среднем должно быть 55 единиц на каждые 135 цифр, то есть почти 4 цифры из 10 будут единицами. Таким образом, если последовательность (3) удовлетворяет второму условию (согласно которому все пары цифр должны встречаться одинаково часто), то она не удовлетворяет первому условию (согласно которому каждая цифра, в том числе и единица, встречается в среднем один раз на каждые 10 цифр). Ясно, что выбор других начальных цифр последовательности ничего не исправит. Вместо сложения можно было бы воспользоваться умножением, но и это не очень бы помогло.

Можно даже рискнуть и высказать предположение, что такие способы никогда не позволят получить случайную последовательность. Но чтобы это предположение имело смысл, необходимо более подробно объяснить, что такое случайная последовательность. Говоря о случайной последовательности, мы имеем в виду такую последовательность, в которой встречаются все однозначные числа (цифры) (каждое — с частотой  $1/10$ ), все двузначные числа (каждое — с частотой  $1/100$ ), все трехзначные числа (каждое — с частотой  $1/1000$ ) и т. д. Следовательно, если мы выпишем, например, 30 000 цифр такой последовательности и разобьем их на трой-

ки — всего будет 10 000 троек, — то среди них тройка 578 должна появиться около 10 раз. Может быть, кому-нибудь покажется, что для получения случайной последовательности проще всего выписать подряд целые числа:

12345678910111213141516171819202122232425 ...

но этот способ в действительности нехорош. Дело в том, что в такой последовательности цифры изменяются очень медленно. Например, когда мы дойдем до 100, то у всех последующих чисел вплоть до 199 будет — что ни первая цифра, то единица. Лучше уж выписывать подряд степени двойки 1, 2, 4, 8, 16, 32 и т. д.

12481632641282566512102420484096

8192163843276865536131072262144 ....

(4)

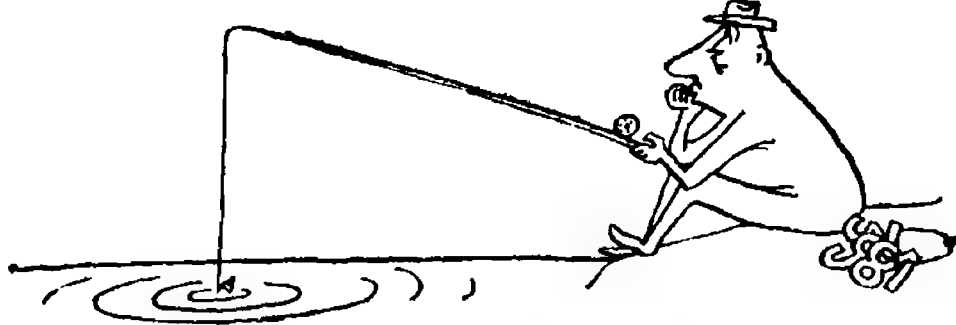
хотя и в этом случае неизвестно, удастся ли получить указанным способом случайную последовательность. Проверка показала, что в этой последовательности мало нечетных чисел.

Пусть читатель не думает, что автор рассказывает обо всем этом лишь для того, чтобы познакомить его с тем, что хорошо известно людям, занимающимся математикой. Автор рассчитывает также и на то, что кому-либо из читателей удастся придумать хороший рецепт для получения случайных чисел, так как ученые сегодня таким рецептом не располагают.

Для облегчения задачи упомянем еще об одном законе.

При исследовании ошибок астрономических наблюдений обратили внимание на одну особенность положительных и отрицательных ошибок, которую можно очень точно «перевести» на язык орла и решки. Если симметричную монету бросать достаточно долго и отличать длину серий из одних лишь орлов и одних лишь решек, то средняя длина таких серий при большом числе бросаний стремится к 2. Поясним «закон двойки» на примере (1):

Р ОО РРРРРРРР ОООО РР О Р О Р О Р О  
Р ОО Р ОО О Р ОО Р ОО О О О Р ОО О О РРР  
О Р ОО О О О О О О О Р ОО Р О Р О Р О РРР  
ОО Р ОО Р ОО РРРР ОО РР О РРРР О  
РР О Р ОО Р О.



Горизонтальными линиями здесь подчеркнуты серии, состоящие из одних лишь орлов и одних лишь решек. Оказывается, что всего их 52, а поскольку полное число бросаний равно 100, то средняя длина серий составляет  $100/52 = 1,92$  бросаний. Таким образом, наш «опыт» вполне убедительно подтверждает «закон двойки».

«Закон двойки» позволяет, например, исследовать, как распределяются особи мужского и женского пола в потомстве одной курицы — случайно, как орлы и решки при бросании монеты, или не случайно? Все яйца, снесенные курицей в течение года, можно было бы дать ей высидеть, затем отметить буквой *O* каждого вылупившегося петушка, а буквой *P* — каждую курочку и вычислить среднюю длину серий, состоящих из одних *O* и одних *P*. Если средняя длина будет сильно отличаться от 2, то шансы теории случайного распределения пола упадут, если же средняя длина серии окажется близкой к 2, то они значительно возрастут, хотя считать теорию случайного распределения пола окончательно обоснованной было бы преждевременным.

Когда нам встречается какая-нибудь трудная загадка и все хитроумные попытки решить ее проваливаются одна за другой, полезно поразмыслить над тем, для чего и кому нужно решение этой задачи. Для чего людям нужны случайные последовательности? Например, выбирая из случайной последовательности (4) по очереди четверки цифр, можно составить таблицу случайных чисел. Начинаться эта таблица будет так:

1248	1632	6412	8256	5121
0242	0484	0968	1921	6384
3276	8655	3613	1072	2621
. . . . .				

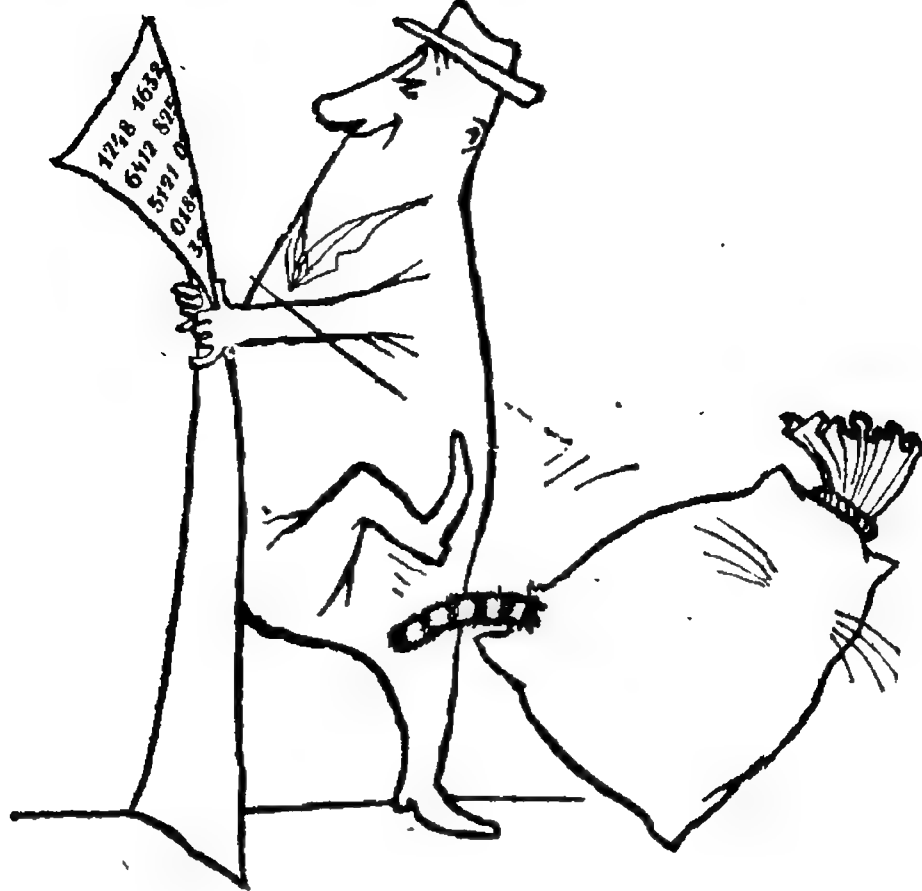
(5)

Продолжив нашу последовательность достаточно далеко, мы получили бы таблицу (5), содержащую 10 000

четырёхзначных чисел. Заметим, между прочим, что в такой таблице встречаются не все числа от 0000 до 9999: около 3680 чисел в ней вообще не было бы, зато некоторые другие числа попадались бы по многу раз. Но для чего, спросит читатель, нам такая таблица? Десять тысяч четырёхзначных чисел — это целая книжка. Может быть, математики всерьёз считают, что такие книжки нужно печатать, и рекомендуют их людям в качестве занимательного чтения? Может быть, выучивают наизусть и «с выражением» декламируют на своих тайных собраниях? Представь себе, читатель, что в этой шутке есть доля правды. Такие таблицы печатают, они могут даже иметь привычный книжный формат. Но нужны они не математикам, а людям практики: инженерам, техникам, работникам торговли. Рассмотрим один из примеров использования таблицы случайных чисел.

### ВЫБОРОЧНАЯ ОЦЕНКА ТОВАРОВ

Польской торговой миссии за границей поручено закупить партию залежавшихся на складах мелких металлических изделий: всякого рода болтов, гаек, гвоздей, крюков, напильников и т. д. Владельцу невыгодно грузить их в вагоны, из вагонов — в трюмы судов, а затем сортировать, поэтому он готов дешево продать свой товар на месте по весу. Товар лежит на складе в ящиках с номерами от 0001 до 1587. В каждом ящике болты, гайки, гвозди и т. п. навалены в полном беспорядке. Владелец согласен на осмотр содержимого ящиков. Торговая миссия командирует своего инженера с заданием: оценить стоимость всей партии товара. Чтобы открыть все ящики, оценить каждый предмет и составить опись всей партии товара, понадобилось бы несколько месяцев, что обошлось бы немногим меньше стоимости всех «железок». Что делает инженер? Он берет таблицу случайных чисел (5) и, читая по порядку стоящие в ней числа, выписывает те из них, которые не превосходят 1587: 1248, 0242, 0484, 0968, 1072,... и т. д. Всего 10 чисел. Затем инженер вскрывает ящики, номера которых совпадают с выписанными числами, и тщательно оценивает их содержимое, составляя его подробную опись. Предположим, например, что во вскрытых ящиках оказалось 127 болтов стоимостью по 1 золотому за каждый,



87 железных колец стоимостью по 60 грошей штука и т. д., а всего товара общим весом 4723 кг — на 3215 злотых. Отсюда инженер вычислил среднюю стоимость одного килограмма товара  $3215 : 4723 = 0,6807$  злотых. Следовательно, один килограмм стоит около 68 грошей, и достаточно взвесить все ящики, чтобы получить примерную оценку стоимости всех «железкок» и сравнить ее с ценой, которую хочет получить за них владелец.

— Но зачем пользоваться случайными числами? — спросит кто-нибудь. — Разве не достаточно было бы оценить содержимое ящиков с номерами от 1 до 10?

Нет, потому что владелец нумеровал ящики в том порядке, как их привозили на склад. Весьма вероятно, что ящики с номерами от 1 до 10 поступили с одной базы или из одной мастерской и имеют примерно одинаковую стоимость. Кроме того, можно предположить, что весь содержащийся в ящиках товар либо дешевле, либо дороже средней стоимости (какая из двух возможностей соответствует действительности, зависит от более подробных сведений).

Что же касается нашей оценки стоимости товара, полученной с помощью таблицы случайных чисел, то она будет вполне убедительной и для владельца ящиков, ко-



торый сам не смог оценить их общей стоимости, а это облегчит переговоры.

Много вопросов можно было бы задать еще в связи с практическим использованием случайных чисел, но мы ограничимся лишь двумя.

1. Разумно ли использовать для практических целей таблицы случайных чисел, для составления которых необходимы либо дорогостоящие устройства, либо применение недостаточно обоснованных и ненадежных вычислительных методов? Ведь даже точное устройство, печатая 10 000 четырехзначных чисел, пропускает несколько цифр, причем иные цифры по несколько раз. Не лучше было бы каким-то образом систематически переставлять числа от 0000 до 9999?

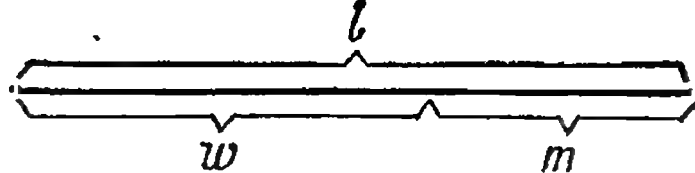
2. Надежен ли описанный нами способ оценки «железок»? Нельзя ли определить хотя бы вероятность того, что, пользуясь им, мы не переплатим за товар, ну, скажем, 5000 злотых?

О чем, собственно, идет речь в первом вопросе? Разумеется, не о случайной последовательности, поскольку случайная последовательность не ограничена и, чтобы построить ее, необходимо иметь рецепт, позволяющий продолжать последовательность дальше, независимо от того, сколько чисел уже выписано. Мы же теперь ограничимся десятью тысячами чисел от 0000 до 1999, которые необходимо разместить «с толком». Не подлежит сомнению, что для практических целей такое размещение не только достаточно, но даже удобнее случайных чисел, поскольку могло бы оказаться, что в случайной последовательности сначала идут подряд несколько десятков чисел, которые начинаются с 1:

1897, 1557, 1994, 1452, 1106, ...,

а именно этого, как ясно из примера с «железками», хотелось бы избежать.

Числа следует разместить так, чтобы мало отличающиеся из них отстояли в таблице далеко друг от друга, а отличающиеся не слишком мало — были разделены средними расстояниями. Эта задача немного напоминает задачу о составлении графика отборочных соревнований, проводимых по олимпийской системе. Устанавливая очередность встреч, необходимо следить за тем, чтобы два сильных участника не встречались между



Золотое деление единичного отрезка.

собой в первом круге, поскольку один из них, будучи побежденным, не сможет войти в команду сильнейших.

После долгих попыток все-таки удалось построить таблицу, обладающую нужными свойствами. Необходимо было придумать ей имя, и ее называли *железной таблицей*. До этого случая в математике не было принято давать «металлические» названия, если не считать одно-единственное исключение: в геометрии *золотым* называется такое деление отрезка, при котором весь отрезок во столько раз длиннее большей части, во сколько раз она длиннее меньшей части. На рисунке мы видим золотое деление единичного отрезка. Буквой  $w$  обозначена большая часть, буквой  $m$  — меньшая. Задачу об отыскании золотого отношения можно решить алгебраически. Отрезок требуется разделить так, чтобы  $1:w = w:m$ , а поскольку  $w + m = 1$ , то  $1:w = w:(1-w)$ , или

$$w^2 = 1 - w.$$

Это квадратное уравнение имеет два корня:

$$\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) \quad \text{и} \quad \frac{1}{2}(-\sqrt{5} - 1).$$

Условию задачи удовлетворяет лишь первый корень (второй корень отрицательный). Таким образом,

$$w = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 0,61803398 \dots$$

Полученное значение  $w$  иррационально. Что это значит? А то, что ни одно из чисел

$w, 2w, 3w, \dots, 100w, \dots, 1000w, 4181w, \dots, 10\,000w, \dots$

не целое. Назовем выписанную нами последовательность чисел, кратных  $w$ , последовательностью золотых чисел. Каждое золотое число имеет целую и дробную часть. Например, у числа  $10\,000w$  целая часть равна 618, а дробная — 0,03398. Число  $4181w$  равно 2584,0001... Его целая часть равна 2584, а дробная — 0,0001...



Ни одно золотое число не имеет дробной части, равной нулю, и никакие два золотых числа не имеют одинаковых дробных частей. Если из последовательности золотых чисел мы выберем 10 000 первых чисел (от  $\omega$  до 10 000  $\omega$ ), то, сравнив их дробные части, обнаружим, что наименьшая дробная часть у числа 4181  $\omega$ , а наибольшая — у числа 6765  $\omega$ . Все 10 000 выбранных золотых чисел можно упорядочить так, что их дробные части будут возрастать. Если опустить всюду букву  $\omega$ , то получится следующая таблица чисел:

4181	8362	1597	5778	9959
3194	7375	0610	4791	8972
...	...	...	...	...
8739	1974	6155	3571	7752
0987	5168	9349	2584	6765.

Это и есть *железная таблица*. Она содержит все числа от 0001 до 10 000 (последнее число фигурирует в таблице как 0000), причем каждое один и только один раз, и занимает 25 страниц среднего формата. В числе других железной таблицей пользуется и Главное статистическое управление. Для примера вернемся к оценке ящиков. Предположим, что нам требуется выбрать 10 из них. Открываем железную таблицу на тринадцатой странице и начинаем читать с любого места, например с четвертого числа в девятой строке сверху: 2478, 1491 и т. д. При этом пропускаем все числа, которые меньше 0375 и больше 3870, поскольку ящиков с такими номерами нет. В результате мы получаем 10 чисел:

2478, 1491, 3088, 2101, 3698,  
1114, 2711, 1724, 3321, 0737.

Изобразим их наглядно, отложив на прямой:



Верхние штрихи показывают положение выбранных номеров на числовой оси (число 100 соответствует примерно 2,3 мм). Так выглядит тот набор чисел, к которому стремился наш инженер. Вдохновленный успехом, он решил посмотреть, что произойдет, если владелец металлических изделий сочтет выборку слишком малой и потребует, чтобы к десяти вскрытым ящикам присоединили еще пять. На странице 13 железной таблицы читаем числа, идущие вслед за последним из выписанных нами чисел:

2334, 1347, 2944, 1957, 3554.

Этим номерам на нашем рисунке соответствуют нижние штрихи. Мы видим, что новые штрихи разделили длинные отрезки, отделяющие друг от друга старые штрихи: таблица словно сама знает, к чему мы стремимся... Такова таинственная сила золотых чисел. Тут читатель спросит:

— А что было бы, если бы вместо  $(\sqrt{5} - 1)/2$  мы взяли, например,  $\sqrt{2}$ , то есть тоже иррациональное число?

Получилось бы неплохо, но все же не так хорошо, как с золотыми числами. Впрочем, если вернуться к золотому сечению и вместо  $\varphi$  взять  $m$ , то таблица железных чисел получится ничуть не хуже. По-видимому, ни одно другое число, отличное от  $\varphi$  и  $m$ , этой особенностью не обладает. И снова мы должны извиниться за то, что ставим задачи, которые не пытаемся не только решить, но даже объяснить. Мы поступаем так лишь потому, что нам не остается ничего другого: нам ничего больше не известно, мы довели тебя, читатель, до границы знакомой нам области и не знаем дороги дальше...

На второй вопрос ответить легче. Надежность способа оценки зависит от того, насколько различаются по стоимости ящики: значительно или незначительно. Если различие в их стоимости велико, то выборочная оценка не слишком надежна, если различие мало, то она гораздо надежнее. Вскрыв 10 ящиков и исследовав их содержимое, инженер узнал, значительно ли они отличаются друг от друга по стоимости. Если различие велико, то инженеру следует вскрыть еще 10 ящиков. Но тут снова возникает вопрос: какие числа считать резко отличными и какие — незначительно? Оценить, резко ли отлича-

ся по росту ученики в классе, можно, сравнив самого высокого ученика с самым маленьким, но такой способ нехорош. Если в классе 48 учеников ростом 160 см и, кроме того, один ученик ростом 130 и один ростом 180 см, то по этому способу мы получили бы разницу в росте учеников 50 см. Если же самый высокий и самый маленький ученики перейдут в другую школу, то разница в росте упадет до нуля. Оценка роста ненадежна потому, что отсутствие двух учеников из пятидесяти резко изменяет ее. Следовательно, необходимо найти другие способы. Ими мы сейчас и займемся.

### РАЗБРОС ЧИСЕЛ

Каждый знает, что такое среднее двух чисел. Например, среднее 1 и 5 равно 3, поскольку  $1 + 5 = 6$ ,  $6 : 2 = 3$ . Среднее чисел 2 и 4 также равно 3, и среднее чисел 3 и 3, как сразу видно, равно 3. Возводить числа в квадрат мы тоже умеем. Например,  $1^2 = 1$ ,  $2^2 = 4$ ,  $3^2 = 9$  и т. д. Теперь будем выполнять оба действия — взятие среднего и возведение в квадрат — по очереди, одно за другим, но как? Сначала находить среднее двух чисел и потом возводить его в квадрат или сначала возвести каждое число в квадрат и лишь потом взять среднее полученных квадратов? Ведь это не одно и то же, как не все равно, всыпать ли сначала чай в воду и затем довести ее до кипения или сначала вскипятить воду и лишь потом всыпать в кипяток чай. Впрочем, попробуем! Среднее чисел 1 и 5 равно 3, число 3 в квадрате равно 9. А теперь сначала возведем числа 1 и 5 в квадраты (оплучим  $1^2 = 1$ ,  $5^2 = 25$ ), а затем вычислим среднее квадратов 1 и 25 (оно равно  $26/2 = 13$ ). Итак, второй способ дал большее число, чем первый ( $13 > 9$ ). Всегда ли так должно получиться? Возьмем числа 2 и 4. Их среднее снова равно 3, а его квадрат снова равен 9. Второй способ дает  $2^2 = 4$ ,  $4^2 = 16$ ,  $4 + 16 = 20$ ,  $20 : 2 = 10$ . И снова второй способ привел к большему числу, чем первый, хотя разность между полученными числами на этот раз оказалась меньше, чем в первом случае. Попробуем еще раз (может быть, третья попытка приведет к иному результату): среднее чисел 3 и 3 равно 3,  $3^2 = 9$ . Если же сначала возвести в квадрат, а потом вычислить среднее, то получится

$3^2=9$ ,  $3^2=9$ ,  $9+9=18$ ,  $18:2=9$ . На этот раз мы вместо неравенства пришли к равенству: оба способа привели к одному и тому же результату — числу 9. Читателю может показаться, что совпадение результатов произошло из-за равенства исходных чисел. Это действительно так.

Можно сформулировать правило: если взять два различных числа, то первый способ всегда приводит к меньшему результату, чем второй; если же взять два одинаковых числа, то оба способа приводят к одному и тому же результату. В качестве исходных можно выбирать любые числа — правило всегда остается в силе. Впрочем, это нетрудно доказать. Обозначим исходные числа  $a$  и  $b$ . Требуется доказать, что при  $a \neq b$

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 < \frac{a^2+b^2}{2}, \quad (\text{I})$$

а при  $a = b$

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{a^2+b^2}{2}. \quad (\text{II})$$

Начнем с более легкого случая — с доказательства равенства (II). При  $a = b$  в его левой части стоит число  $[1/2(a+a)]^2 = a^2$ , а в правой — число  $1/2(a^2+a^2) = 1/2 \cdot 2a^2 = a^2$ . Следовательно, слева и справа стоят одинаковые числа.

Докажем теперь неравенство (I). Обозначим через  $L$  выражение, стоящее в его левой части, и через  $P$  — в правой:

$$L = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2, \quad P = \frac{a^2+b^2}{2}.$$

Поскольку на этот раз  $a \neq b$ , то разность  $a - b$  отлична от нуля и ее половина  $1/2(a-b)$  также отлична от нуля (хотя неизвестно, положительна она или отрицательна). Квадрат числа, отличного от нуля, всегда *положителен* (например,  $3^2 = 9$ ,  $(-3)^2 = 9$  и т. д.). Следовательно, квадрат числа  $1/2(a-b)$  *положителен*. Обозначим его  $D$ :

$$D = \left(\frac{a-b}{2}\right)^2, \quad D > 0.$$



Вычислим теперь сумму  $L + D$ :

$$L + D = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \frac{(a+b)^2 + (a-b)^2}{4} = \\ = \frac{a^2 + 2ab + b^2 + a^2 - 2ab + b^2}{4} = \frac{2a^2 + 2b^2}{4} = \frac{a^2 + b^2}{2} = P.$$

Итак,  $L + D = P$ . Это равенство означает, что к  $L$  нужно прибавить положительное число  $D$ , чтобы оно стало равным  $P$ . Следовательно,  $P$  больше  $L$ : выражение в правой части неравенства (I) больше выражения, стоящего в левой части того же неравенства. Мы даже знаем, на сколько больше: на  $[\frac{1}{2}(a-b)]^2$ . Таким образом, второй способ приводит к большему числу, чем первый, причем результаты отличаются один от другого тем значительнее, чем больше разность исходных чисел.

Испробуем теперь оба способа на трех числах, например на числах 1, 2, 3. Их среднее равно 2 (поскольку  $1 + 2 + 3 = 6$ ,  $6 : 3 = 2$ ), квадрат среднего ра-



вен 4. Второй способ дает  $1^2 = 1$ ,  $2^2 = 4$ ,  $3^2 = 9$ ,  $1 + 4 + 9 = 14$ ,  $14 : 3 = 4\frac{2}{3}$ . Мы видим, что второй способ и на этот раз дал больший (на  $\frac{2}{3}$ ) результат, чем первый. Если бы мы взяли одинаковые числа, например 2, 2, 2, то оба способа привели бы к одному и тому же результату. Невольно напрашивается мысль, что для трех чисел справедливо такое же правило, как и для двух:

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 < \frac{a^2+b^2+c^2}{3},$$

если не все три числа одинаковые,

и

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{3},$$

если  $a = b = c$ .

Доказать это можно так же, как и в случае двух чисел. Пусть читатель сам решит, поверить ли нам на слово или самостоятельно доказать правило. Впрочем, мы ждем от читателя большего: он должен поверить, что наше правило справедливо для четырех, пяти, шести и т. д. чисел так же, как оно справедливо для двух и для трех. Короче говоря, сколько бы чисел мы ни взяли, квадрат среднего всегда будет меньше среднего квадратов либо (если исходные числа равны) равен среднему квадратов. То же правило можно сформулировать и по-другому: разность между средним квадратов и квадратом среднего всегда неотрицательна.

Из рассмотренных примеров ясно, что эта разность, или отклонение среднего квадратов от квадрата среднего, тем больше, чем сильнее отличаются друг от друга исходные числа. Возьмем, например, 10 чисел: 0, 4, 0, 4, 0, 4, 0, 4, 0, 4. Их среднее равно 2, а его квадрат 4. Квадраты чисел соответственно равны 0, 16, 0, 16, 0, 16, 0, 16, 0, 16, а среднее квадратов равно 8. Отклонение квадрата среднего от среднего квадратов равно 4 ( $8 - 4 = 4$ ). А теперь выберем в качестве исходных числа 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3. Их среднее равно 2, его квадрат — 4. Возведем числа в квадрат: 1, 9, 1, 9, 1, 9, 1, 9, 1, 9. Среднее квадратов равно 5. Отклонение составляет 1. Итак, для чисел 0, 4, 0, 4, ... разность между средним квадратов и квадратом среднего равна 4, а для чисел 1, 3, 1, 3, ... — лишь 1.

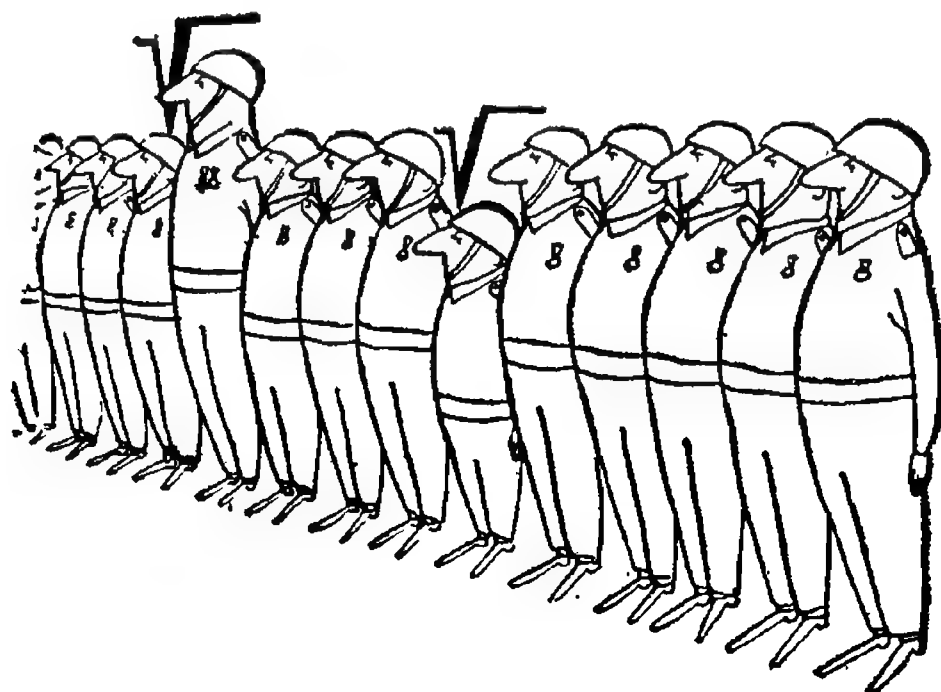
## ОТКЛОНЕНИЕ СРЕДНЕГО КВАДРАТОВ ОТ КВАДРАТА СРЕДНЕГО, ИЛИ ДИСПЕРСИЯ

Возникает мысль: а можно ли оценивать разброс чисел по отклонению среднего квадратов от квадрата среднего? Такое отклонение называется *дисперсией*. Числа 0, 4, 0, 4, ... обладают большей дисперсией, чем числа 1, 3, 1, 3, ..., хотя и у тех, и у других средние одинаковы (оба средних равны 2).

Однако возвратимся на склад металлических изделий и попытаемся определить, насколько однородно содержимое ящиков. На практике также часто приходится отвечать на подобные вопросы, уметь оценивать однородность различных процессов, например, определить, какой из двух автоматов, выпускающих проволоку, дает более однородную продукцию. Даже если на глаз видно, какому из автоматов следует отдать предпочтение, мы все равно хотели бы знать, *насколько* проволока, выпускаемая автоматом *A*, однородней проволоки, выпускаемой автоматом *B*. Мы хотели бы каким-то образом измерить однородность продукции, производимой автоматом *A*, чтобы год спустя снова измерить ее и сравнить с существующей ныне. Наше правило подсказывает нам, как это сделать. Возьмем метр проволоки, выпущенной автоматом *A*, и разрежем его на части длиной в 1 дм каждая. Взвесив отрезки проволоки на точных весах, получим 10 чисел (вес каждого отрезка в дециграммах), например таких:

22, 21, 20, 23, 20, 21, 19, 20, 24, 24.

(6)



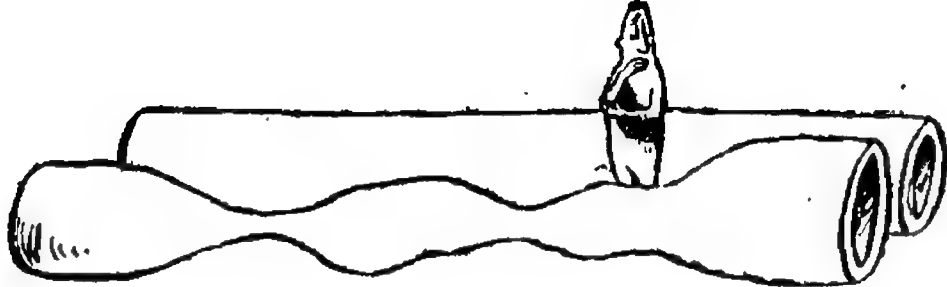
Теперь вычислим дисперсию, но не так, как делали это раньше, чтобы не возводить в квадрат двузначные числа. Наша задача существенно упростится, если учесть, что неоднородность зависит лишь от неравных между собой чисел и не изменится, если из всех чисел вычесть одно и то же число, например 19. Пользуясь этими соображениями, мы можем вместо чисел (6) рассмотреть числа

$$3, 2, 1, 4, 1, 2, 0, 1, 5, 5. \quad (7)$$

Их среднее равно  $24 : 10 = 2,4$ . Возведем числа в квадрат

$$9, 4, 1, 16, 1, 4, 0, 1, 25, 25. \quad (8)$$

и вычислим среднее квадратов  $86 : 10 = 8,6$ . Итак, дисперсия, или отклонение среднего квадрата от квадрата среднего, составляет  $8,6 - (2,4)^2 = 2,84$ . Это число мы и примем за меру неоднородности продукции автомата А. Заметим, что мы попутно вычислили средний вес 1 дм проволоки, поскольку среднее чисел (7) равно 7,4, а среднее чисел (6) на 19 больше, то есть равно 21,4. Следовательно, 1 дм проволоки, выпускаемой автоматом А, весит в среднем 21,4 дг, или 2,14 г. Еще один вопрос беспокоит нас. Когда мы измеряли вес проволоки в дециграммах, средний вес был равен 21,4 дг. Когда же мы перешли к граммам, то средний вес стал равным 2,14 г. При измерении в дециграммах дисперсия была равна 2,84. Чему равна дисперсия при измерении веса в граммах? На этот вопрос ответить легко: при переходе к граммам дисперсия уменьшится в 100 раз, поскольку при замене дециграммов граммами все числа уменьшатся в 10 раз, а их квадраты — в 100 раз (например, квадрат числа 3 равен 9, а квадрат числа 0,3 равен 0,09, то есть в 100 раз меньше 9). Итак, при измерении веса в граммах дисперсия будет равна  $2,84 : 100 = 0,0284$ . Отсюда возникает такая неприятность. Предположим, что один инженер измерил вес отрезков проволоки в дециграммах и написал: «Один дециметр проволоки, выпущенной автоматом А, весит в среднем 21,4 дг с неоднородностью 2,8». Другой инженер измерил вес проволоки в граммах и написал: «Один дециметр проволоки, выпускаемой автоматом А, весит в среднем 2,14 г с неоднородностью 0,028».



О том, что один инженер выражает средний вес в дециграммах, а другой — в граммах, можно не беспокоиться: оба веса сходятся. С неоднородностью проволоки дело обстоит хуже. Первый инженер сообщает: «Автомат А выпускает плохую проволоку. Разделенная на дециметровые отрезки, проволока имеет почти 13% неоднородности». И действительно, число 2,8 составляет более 13% от 21,4. Второй инженер возражает: «Ничего подобного! Уровень неоднородности не достигает даже 1,5%». И он также прав: 1,5% от 2,14 составляют около 0,032, а неоднородность, по измерениям второго инженера, оценивается лишь числом 0,028. «Следовательно, — заключает второй инженер, — проволока хорошая».

За разрешением спора инженеры обратились к математику. Тот попросил показать выкладки и объяснил, что разногласия возникли из-за того, что при оценке неоднородности проволоки числа приходится возводить в квадрат, а при вычислении среднего веса ничего возводить в квадрат не требуется. Чем же помочь горю? А вот чем: принять за меру неоднородности не дисперсию, а квадратный корень из нее! Инженеры решили испытать совет на деле. Квадратный корень из числа 2,8 равен 1,68..., а квадратный корень из числа 0,028 равен 0,168... Теперь уже оба инженера согласились, что неоднородность проволоки составляет 7,8%: число 1,68 составляет 7,8% от 21,4, а число 0,168 — 7,8% от 2,14. Первый инженер записал результат своих измерений так: «Один дециметр проволоки, выпускаемой автоматом А, весит  $(21,4 \pm 1,68)$  дг; коэффициент неоднородности равен 7,8%», а второй: «Один дециметр проволоки, выпускаемой автоматом А, весит  $(2,14 \pm 0,168)$  г; коэффициент неоднородности равен 7,8%». Оба инженера согласились, что автомат А выпускает неплохую проволоку: неоднородность составляет 7,8%.

Квадратному корню из дисперсии необходимо дать свое название. Назовем его *средней квадратичной ошиб-*

кой. Средняя квадратичная ошибка в весе дециметровых отрезков проволоки составляет примерно 0,17 г (более точно: 0,168 г).

Что дает вычисление средней квадратичной ошибки? Предположим, что проволоку заказало предприятие, выпускающее какой-то другой товар, который упаковывают в мешки, а специальный автомат разрезает проволоку на отрезки длиной 10 см, связывает ими горловины мешков и навешивает пломбу. Если проволока слишком тонкая, автомат ее рвет, если слишком толстая, — останавливается. Однако автомат можно было бы отрегулировать в определенных границах, соответствующих средней толщине поставляемой предприятию проволоки, но наладить автомат, если проволока неоднородна, просто невозможно. Поэтому-то предприятие, заказавшее проволоку, и оговорило специальное условие: неоднородность проволоки не должна превышать 8%. Проволока, выпускаемая автоматом А, укладывается в допустимые пределы, хотя и приближается к опасной черте. Руководству предприятия следует не упускать из виду, что при малейшем ухудшении работы автомата заказчики забракуят выпускаемую им продукцию как не соответствующую техническим условиям.

### КОНТРОЛЬ ЗА КАЧЕСТВОМ

Каким образом предприятию, выпускающему проволоку, воспользоваться нашим советом: «Не упускать из виду!»? Контролировать качество собственной продукции, то есть через определенный промежуток времени, например каждые три дня, вычислять коэффициент неоднородности проволоки? Для этого, разумеется, совсем не обязательно каждые три дня повторять все вычисления. Следует лишь вырезать из мотка проволоки, выпущенной автоматом А в дни контроля, отрезок длиной 1 м и взвесить его. Предположим, что метр проволоки весит 2,5 г. Следовательно, средний вес одного дециметра равен 2,5 г. Допустимая неоднородность составляет 8%, то есть 0,2 г. Разделим проволоку на дециметровые отрезки и взвесим их. При этом мы будем записывать результат взвешивания не всех 10 отрезков, а лишь тех, которые выходят за границы интервала  $2,5 \pm 0,2$ , то есть меньше 2,3 или больше 2,7 г.

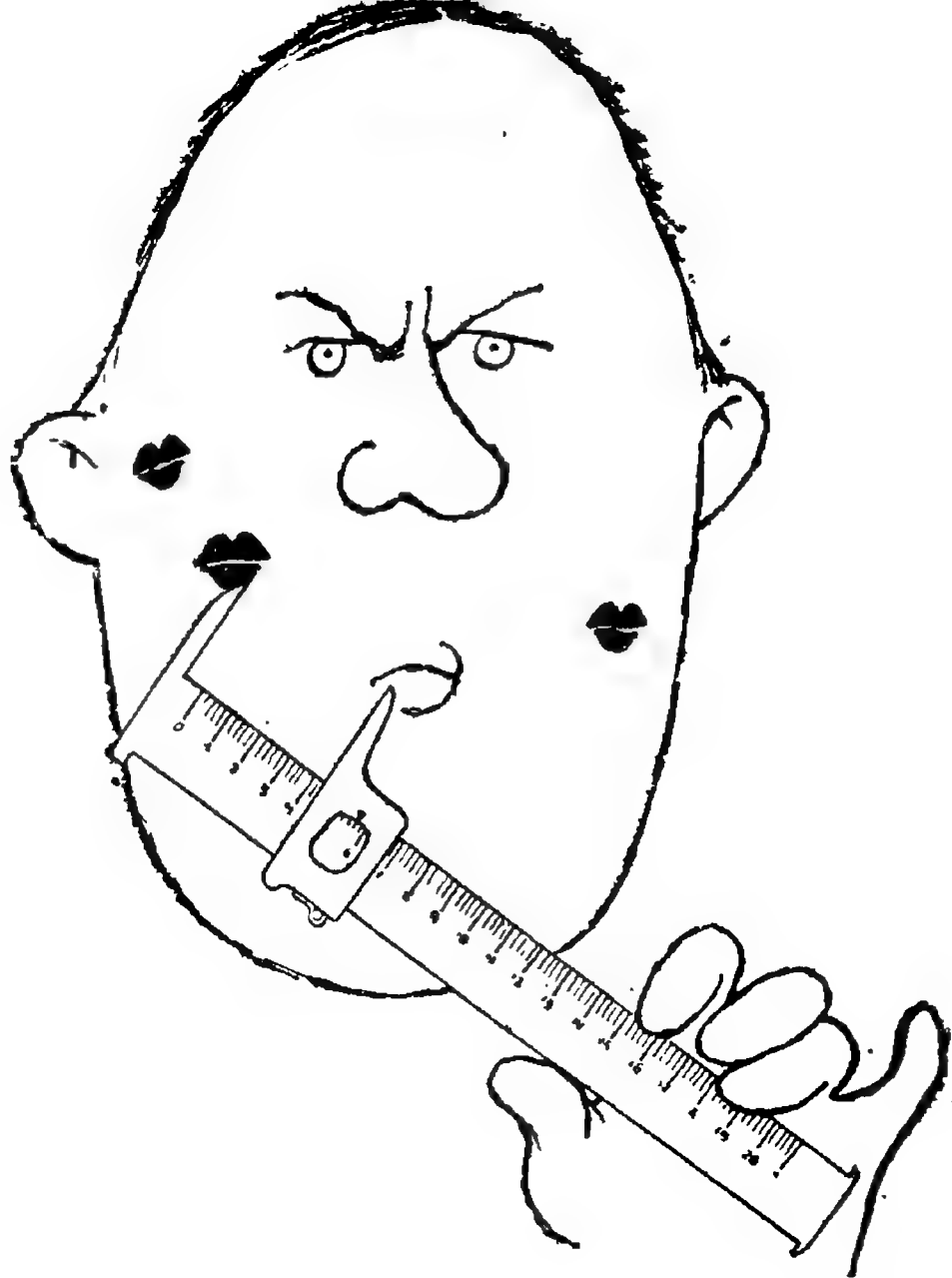


Предположим, что таких отрезков 4. Что можно сказать о проволоке: стала ли она более или, наоборот, менее однородной, чем прежде? Раньше средний вес отрезка составлял 2,14 г. Восемь процентов от 2,14 равны 0,17, поэтому прежде допустимыми границами веса были  $2,14 \pm 0,17$ , то есть 19,7 и 23,1 дг. Взглянув на числа (6), мы увидим, что за допустимые пределы вышли три из них. Теперь же за пределами 8%-ного отклонения оказались 4 отрезка. Поскольку проволока и раньше едва удовлетворяла техническим условиям, то необходимо признать, что ее однородность перестала удовлетворять предъявляемым требованиям. Следовательно, автомату А необходим ремонт.

Понятие дисперсии позволяет оценивать однородность не только проволоки и всякого рода промышленных изделий. Пользуясь им, можно исследовать, например, ритмичность работы трамваев. На линию АВ трамваи выходят по расписанию каждые 8 мин из А в В и каждые 8 мин в обратном направлении — из В в А. Контролер отмечает время прибытия трамваев на конечные станции и делит весь рабочий день вагонновожатого на равные промежутки, которые — по расписанию — должны быть одинаковыми (каждый по 8 мин). Вычислим дисперсию и так же, как мы делали с весом проволоки, найдем коэффициент неоднородности. Оказывается, что коэффициент неоднородности изменяется от одного вагонновожатого к другому. Премию следует присудить тому из них, у кого коэффициент неоднородности наименьший.

### СРЕДНЯЯ КВАДРАТИЧНАЯ ОШИБКА

В XIX веке понятия дисперсии и тесно связанной с ней средней квадратичной ошибки не были известны и ими практически не пользовались. Но уже тогда было известно другое, не менее важное понятие, а именно оценка надежности измерения. Представим себе, что числа (6) означают не вес 10 отрезков проволоки, а результаты 10 взвешиваний одного и того же отрезка проволоки на одних и тех же весах. «Как это может быть?» — спросит читатель. Что это за весы, которые при взвешивании одного и того же груза показывают различный вес? Обычные магазинные весы, предназ-



наченные для точного взвешивания десятков граммов, позволяют взвешивать граммы, но различить десятые доли грамма на шкале, по которой перемещается подвижная стрелка, уже трудно. Как оценить надежность отдельного взвешивания отрезка проволоки на таких весах? Воспользуемся для этого понятием средней квадратичной ошибки. Необходимые выкладки мы уже сделали, хотя и для другой цели: средняя квадратичная ошибка отдельного результата равна 0,249 г, то есть немного меньше четверти грамма. Для чего требуется вычислять среднюю квадратичную ошибку? Здесь преследуются две цели. Они станут понятны на двух примерах. Во-первых, если известно, что средняя квадратичная ошибка в определении веса составляет четверть грамма, то мы откажемся пользоваться такими весами в аптеке, но не станем возражать, если на этих весах нам предложат взвесить чай или кофе. Во-вторых,

имеется специальная Палата мер и весов, которая контролирует точность весов и ставит специальный знак, свидетельствующий об их исправности. Сотрудник этой палаты, проверяя весы, вычисляет допускаемую ими среднюю квадратичную ошибку. Ошибка не может выходить за пределы, указанные в инструкции. Для аптекарских весов такие пределы средней квадратичной ошибки одни, для магазинных весов — другие, для весов, предназначенных для взвешивания угля, — третьи.

## КАПЛИ ДОЖДЯ

Понятие дисперсии имеет и другие, не менее интересные приложения. Представим себе пешеходную дорожку, выложенную квадратными плитами. Мимолетный дождь оставил на каждой плите капли — их можно сосчитать. Перед нашим домом лежит 50 плиток. Если бы мы действительно сосчитали капли на каждой плите, то получили бы 50 чисел, по которым оценили бы неравномерность дождя. В этом случае мы могли бы воспользоваться способом, к которому прибегли инженеры с проволоочной фабрики. Тогда мы его раскрытиковали, а потому вполне оправданы опасения, что результаты окажутся противоречащими друг другу: ведь теперь нет ни граммов, ни дециграммов, а только капли дождя и считать их можно одним-единственным способом.

Итак, вычислим дисперсию и сравним ее со средним числом капель на плите (так действовали инженеры, когда неправильно вычисляли процент неоднородности проволоки). Выражение будет иметь следующий вид:

$$L \text{ (коэффициент неоднородности)} = \frac{\text{дисперсия}}{\text{среднее}} = \\ = \frac{\text{среднее квадратов} - \text{квадрат среднего}}{\text{среднее}},$$

откуда

$$L = \frac{\text{среднее квадратов}}{\text{среднее}} - \text{среднее.} \quad (9)$$

Итак, выражение для коэффициента неоднородности получено. Что дает это выражение в том случае, когда число капель на каждой плите будет одинаковым, на-



пример равным 5? Квадрат числа капель на каждой плите равен 25, среднее квадратов — 25, среднее число капель — 5. Подставив числовые значения, получаем

$$L = \frac{25}{5} - 5 = 5 - 5 = 0.$$

Коэффициент неоднородности равен нулю, что, впрочем, соответствует действительности, поскольку капли распределились по плитам равномерно. Посмотрим, что получится, если все капли дождя упадут на одну плитку. Пусть капель будет  $g$ , а плиток  $N$ . На одну плитку попало  $g$  капель, на все остальные — 0 капель. Квадраты числа капель равны соответственно  $g^2$ , 0, 0, ..., 0. Среднее квадратов равно  $g^2/N$ , среднее число капель —  $g/N$ . Подставляя их в выражение (9), находим

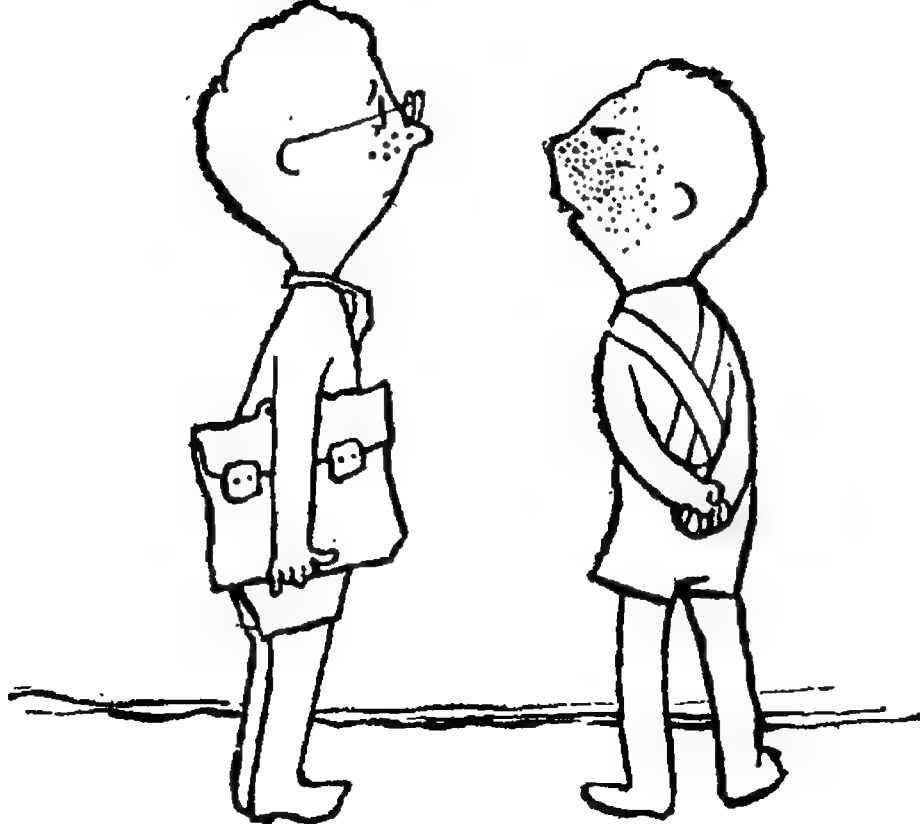
$$L = \frac{g^2 N}{g N} - \frac{g}{N} = g - \frac{g}{N} = g \left( 1 - \frac{1}{N} \right). \quad (10)$$

Если в этом выражении положить  $N = 1$ , то получим  $L = 0$ . Выражение (10) говорит: если есть лишь одна плита, то распределение капель равномерно. Что это значит? А то, что наш способ не позволяет оценивать неравномерность распределения капель дождя, если вся дорожка состоит из одной плиты. Об этом можно было бы догадаться и без вычислений.

Если число  $N$  очень велико, то  $1/N$  — очень малая дробь, а  $1 - 1/N$  — число, близкое к 1. В выражении (10)  $g$  умножается на  $(1 - 1/N)$ , то есть на число, близкое к единице, следовательно, произведение мало отличается от  $g$ . Например, при  $g = 10$  и  $N = 100$ .

$$L = 10(1 - 0,01) = 10 \cdot 0,99 = 9,9.$$

Тут уже неравномерность распределения капель дождя заметна, и неудивительно: плиток было 100, упало всего 10 капель дождя, причем все на одну плиту. Выражение (10) выразительно подчеркнуло эту неравномерность. Спросим теперь, что произойдет, если капли



*Будь нас столько, сколько веснушек, каждому досталось бы по одной?*

(пусть их по-прежнему будет  $g$ ) останутся там, где они упали, а мы будем изменять размеры плит. Начнем с одной большой плиты. Мы уже знаем, что в этом случае  $L = 0$ . Теперь будем уменьшать плиты. Их будет становиться все больше и больше, и наступит такой момент, что размер плиты окажется меньше расстояния между двумя ближайшими каплями. Очевидно, что тогда ни на одной плитке число капель не будет превышать 1. Следовательно, на  $g$  плитках будет по 1 капле, а остальные  $N - g$  плиток останутся сухими. Числа, показывающие, сколько капель на отдельных плитках, будут такими:

$$\underbrace{1, 1, 1, \dots, 1}_{g \text{ раз}}, \quad \underbrace{0, 0, 0, \dots, 0}_{N - g \text{ раз}}. \quad (11)$$

Квадраты чисел (11) совпадают с самими числами, поскольку  $1^2 = 1$ ,  $0^2 = 0$ . Следовательно, среднее квадратов равно сумме чисел (11), деленной на  $N$ , то есть  $g/N$ . Среднее чисел (11) также равно  $g/N$ . Подставляя его в выражение (9), получаем

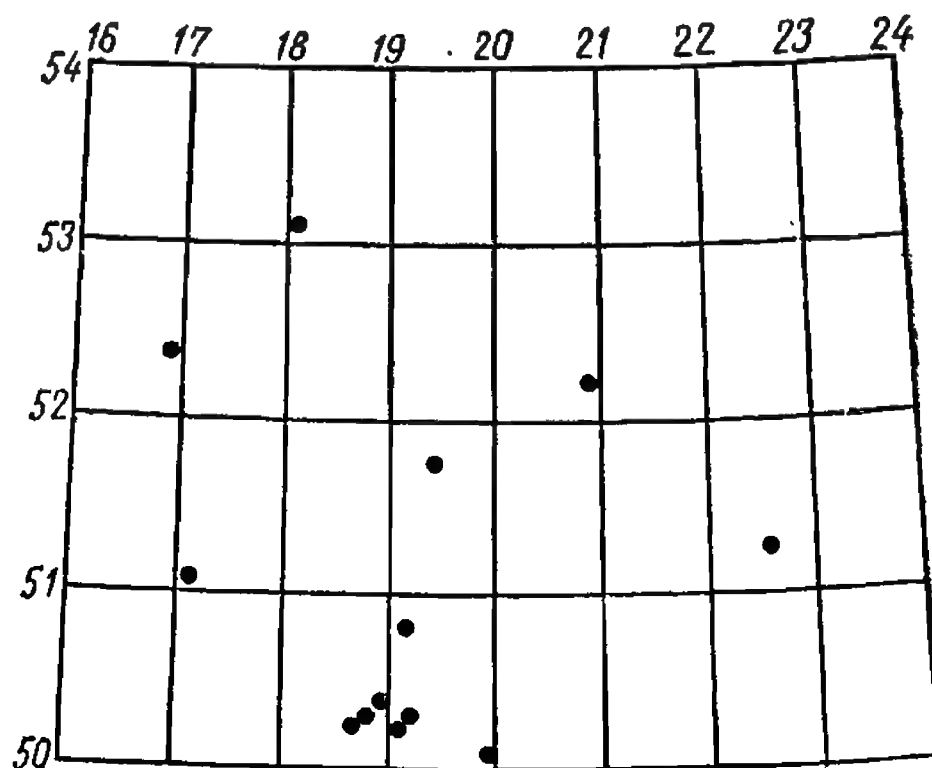
$$L = \frac{g/N}{g/N} - \frac{g}{N} = 1 - \frac{g}{N}. \quad (12)$$

Ясно, что теперь число плиток  $N$  очень велико, поскольку сами плитки очень малы. Впрочем, число  $N$  можно увеличить еще больше, а число капель  $g$  оставить без изменения (правильность рассуждений при этом нигде не нарушится). Тогда дробь  $g/N$  станет близкой к нулю, а величина  $L$  — близкой к единице.

### ПОЛЬСКИЕ ГОРОДА

Попробуем разобраться в том, что мы узнали до сих пор. Величина  $L$ , вычисленная для большой плиты, равна нулю, а когда плитки становятся маленькими, стремится к единице. Попутно может оказаться, что величина  $L$  превышает единицу. Это означает, что все капли попали на одну плиту или на небольшое число плит.

Поясним случай  $L > 1$  на примере, но не капель дождя, а польских городов. Рассмотрим на карте прямоугольную область, заключенную между  $16$  и  $24^\circ$  географической широты и  $50$  и  $54^\circ$  географической долготы. Меридианы и параллели, проведенные через каждый градус, делят область на  $32$  прямоугольника. Внутри большого прямоугольника лежат  $13$  больших городов (каждый с населением свыше  $100\,000$  человек). Воспользуемся сначала очень грубой сеткой: разделим всю область  $52$ -й параллелью на северную и южную части.



Размещение польских городов с численностью населения более  $100\,000$  человек.



К северу от 52-параллели расположено 3 города, к югу — 10 городов. Среднее число городов, приходящихся на половину области, равно 6,5, среднее квадратов числа городов  $(100 + 9) : 2 = 54,5$ . Подставляя это значение в выражение (9), находим

$$L = \frac{54,5}{6,5} - 6,5 = 8,4 - 6,5 = 1,9.$$

Мы видим, что неравномерность в размещении польских городов проявляется весьма отчетливо: на юге их больше, чем на севере, что, впрочем, известно и так.

Разделим теперь область на четыре части, проведя, кроме 52-й параллели, еще и 20-й меридиан. В северо-западной части окажутся 2 города, в северо-восточной — 1, в юго-восточной также 1 и в юго-западной — 9. Возведя эти числа в квадрат, получим 4, 1, 1, 81. Среднее квадратов равно  $87 : 4 = 21,75$ . Среднее числа городов в четвертушке области равно  $13/4 = 3,25$ . Подставляем средние в выражение (9):

$$L = \frac{21,75}{3,25} - 3,25 = 6,67 - 3,25 = 3,42.$$

Мы видим, что величина  $L$  возросла: это начало сказываться скопление городов в юго-западной части области.

Разделим каждую четвертушку на две равные части меридианами. Число прямоугольных клеток возрастет до 8, а число городов в них станет равным соответственно 1, 1, 1, 0, 1, 8, 0, 1. Сумма квадратов этих чисел равна  $1 + 1 + 1 + 0 + 1 + 64 + 0 + 1 = 69$ , а среднее квадратов равно  $69 : 8 = 8,625$ . Среднее самих чисел равно  $13 : 8 = 1,625$ . Подставляя эти значения в выражение (9), находим

$$L = \frac{8,625}{1,625} - 1,625 = 5,341 - 1,625 = 3,72.$$

Мы видим, что неравномерность в размещении городов возросла еще больше. На этот раз неравномерность вызвана Верхнесилезским бассейном, Краковом, Ченстоховом и Лодзью.

Разделим теперь полученные ранее прямоугольники пополам меридианами. Большой прямоугольник



окажется разделенным на 16 частей. Города распре-  
лятся так:

0	1	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
0	7	0	0.

Сумма квадратов этих чисел равна 56, среднее квад-  
ратов — 3,5, среднее число городов в одной клетке —  
0,8125.

$$L = \frac{3,5}{0,8125} - 0,8125 = 4,32 - 0,81 = 3,52.$$

Неравномерность заметно начинает уменьшаться. К этому мы еще вернемся, а пока вычислим  $L$  для области, которая разделена меридианами и параллелями, проведенными через каждый градус широты и долготы, на 32 части. Города распределяются по прямоугольникам так:

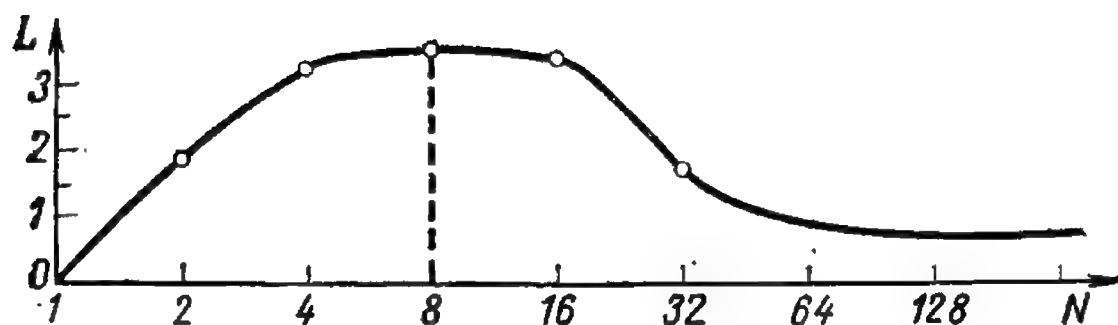
0	0	1	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0	1	0
0	0	3	4	0	0	0	0.

Сумма квадратов этих чисел равна 31, среднее квадратов — 0,92, среднее чисел 0,406.

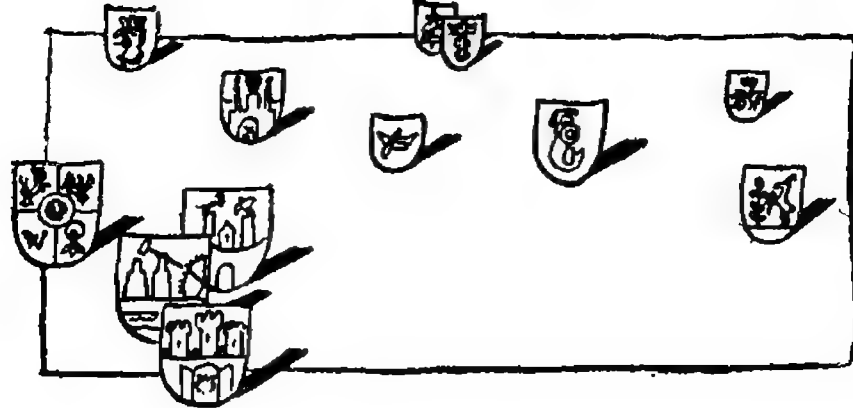
$$L = \frac{0,92}{0,406} - 0,406 = 2,266 - 0,406 = 1,86.$$

Мы видим, что неравномерность в размещении городов быстро убывает, но не будем прослеживать ее ход дальше, поскольку заранее известно, чем все кончится: величина  $L$  станет меньше единицы, а затем начнет медленно возрастать, стремясь, как учит нас выражение (12), к единице, но так никогда ее и не достигая.

Как можно кратко сформулировать итог наших наблюдений? Одной фразой: наибольшее значение  $L$  (равное 3,72) мы получим, разделив всю область на 8 частей так, чтобы Верхнесилезский бассейн с Краковом, Ченстоховом и Лодзью попали в один прямоугольник. При этом  $L$  достигает значения 3,72. Предыдущее значение  $L$  было меньше, поскольку при делении области на 4 части в одном прямоугольнике оказываются города, не образующие естественных скоплений. Следующие значения  $L$  также меньше 3,72, поскольку при дальнейшем



Характеристика размещения польских городов с численностью населения более 100 000 человек (за исключением портовых).



делении области города, образующие естественные скопления, оказываются в различных клетках (см. рисунок на стр. 66).

То, о чем мы говорим, изображено на рисунке, помещенном на стр. 69. По горизонтальной оси отложены равные отрезки, концы которых обозначены числами  $N: 1, 2, 4, 8, 16, \dots$ . Из каждой отмеченной точки восстановим перпендикуляр и на нем отложим вверх величину  $L$  (например, в сантиметрах). Верхние концы отложенных отрезков соединим плавной кривой.

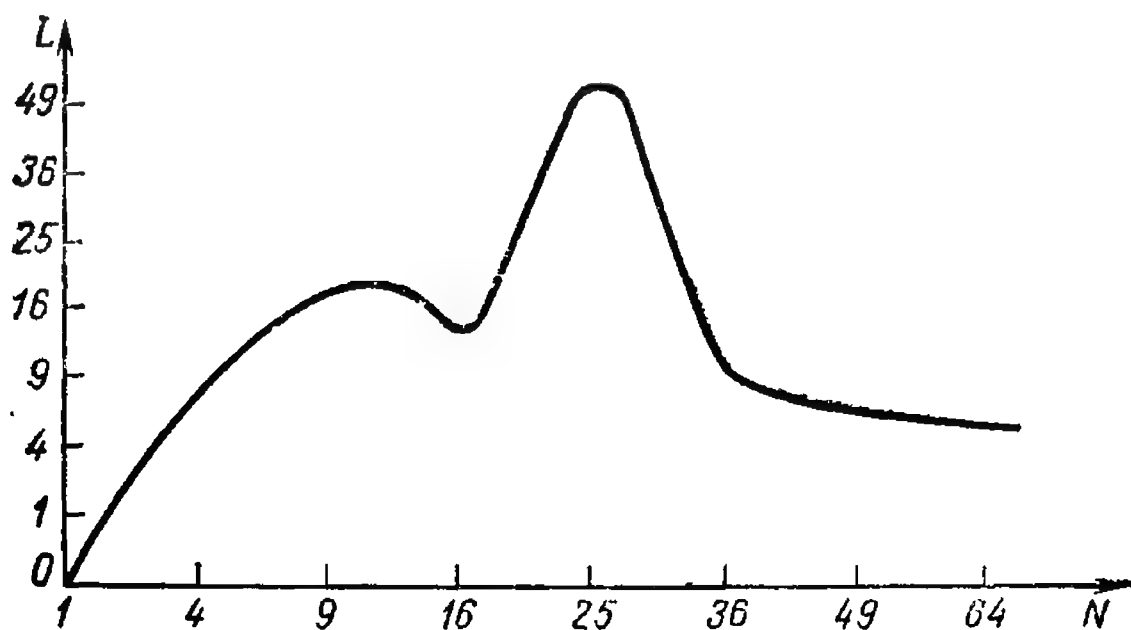
На полученном графике ясно видно, что при разбиении области на 8 частей неравномерность в размещении городов проявляется особенно сильно. Причина неравномерности — скопления городов, а на карте интересующей нас области есть лишь одно скопление. Его образуют города Верхнесилезского бассейна и Лодзинского фабричного центра. Следует иметь в виду, что произведенные нами расчеты носят ориентировочный характер: для упрощения, чтобы придать рассматриваемой области прямоугольную форму, мы исключаем район побережья Балтийского моря, потеряв при этом три больших города (Гданьск, Гдыню и Щецин).

Мы можем ответить на вопрос, как размещены города во всей Польше: разбросаны ли они или образуют скопления? С учетом портов число крупных городов станет равным 16. Разделив территорию Польши на 16 прямоугольников и вычислив  $L$ , мы обнаружим, что  $L < 1$ . Это означает, что большие города как бы «притягивают» друг друга. Разумеется, нетрудно понять, что в действительности не города притягивают друг друга, а море и уголь притягивают к себе города. Мы не будем останавливаться здесь больше на том, какой смысл имеют произведенные нами выкладки. Ска-

жем лишь, что при случайном размещении точек  $L$  получает значения, близкие к 1, если всю область разделить на число частей, равное числу точек. Такие задачи представляют большой интерес: точками могут быть, например, бактерии, а областью — стеклышко с препаратом. Читатель сумеет найти и другие примеры того, как полученные нами знания применяются на практике.

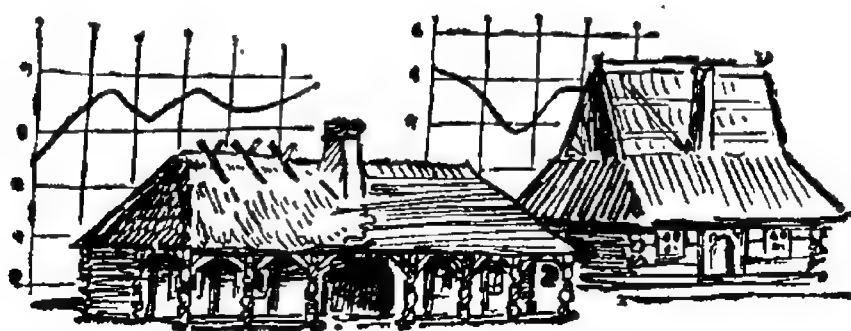
### ДЕРЕВУШКА В ГОРАХ

Представим себе, что кто-то прислал нам письмо с изображенным здесь графиком. Он относится к горной местности площадью  $36 \text{ км}^2$ . Желая оценить размещение деревенских домов по способу, которым мы ранее оценили размещение больших городов, карту этой местности разделили последовательно на 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49 прямоугольных частей. То, что масштабы по осям теперь стали иными, нам ничуть не мешает. Автор письма сообщает, что, желая убедиться в правильности нашего метода, он ждет от нас сообщений о том, как размещены дома в некой деревушке в горах. К счастью, в своем письме он не забыл указать площадь участка, занятого деревней, —  $36 \text{ км}^2$  и число домов в ней — 63. Без этих сведений у нас ничего не получилось бы. На графике бросается в глаза пик  $L$ , равный почти 60 единицам, при  $N = 25$ . Следовательно, при разбиении картины на 25 прямоугольников наблюдается четко выраженное



Характеристика размещения 63 домов в горной местности площадью  $36 \text{ км}^2$ .

скопление домов. Площадь одного прямоугольника при таком разбиении составляет  $36:25 = 1,44 \text{ км}^2$ . Ясно, что собственно деревня с относительно тесной застройкой занимает площадь около  $1,44 \text{ км}^2$ . Если бы деревня состояла из нескольких таких скоплений домов, то при дальнейшем разбиении карты на части на графике появились бы новые пики, однако справа от  $N = 25$  их нет. Зато есть пик слева, при  $N = 9$ , отделенный от главного пика впадиной. Площадь прямоугольника, соответствующего побочному пику, составляет  $36:9 = 4 \text{ км}^2$ . Следовательно, при разбиении местности на прямоугольные участки площадью  $4 \text{ км}^2$  вырисовывается еще одно скопление домов. Отсюда следует, что в деревне, помимо главного центра, имеются меньшие скопления домов, скорее всего, группки из двух домов. Оба пика на графике довольно высокие. Когда мы изучали размещение польских городов, то наибольшее значение  $L$  было равно 3,72, теперь же меньший из пиков достигает почти 20. Этот пик соответствует разбиению местности на 9 частей. Поскольку всего домов 63, то на одну часть приходится в среднем по 7 домов. Достичь  $L = 20$  можно лишь в том случае, если либо подавляющее большинство клеток пусто, либо клетки почти пустые. Отсюда мы уже можем составить представление о том, как выглядит деревушка в горах. Она состоит из центра, застроенного довольно плотно. В нем размещается большинство домов. Диаметр центра — около 1 км. Затем идет еще одна группа домов, нечто вроде хутора. Она располагается на расстоянии не более 2 км от центра (поскольку  $4 \text{ км}^2$  — это площадь квадрата со стороной 2 км). Еще дальше могут встречаться лишь отдельно стоящие дома, но зато здесь много пустых участков площадью до  $4 \text{ км}^2$ . Мелких скоплений домов в деревушке нет. Нет и самой деревни в привычном для нас смысле: об этом свидетельствует резкий



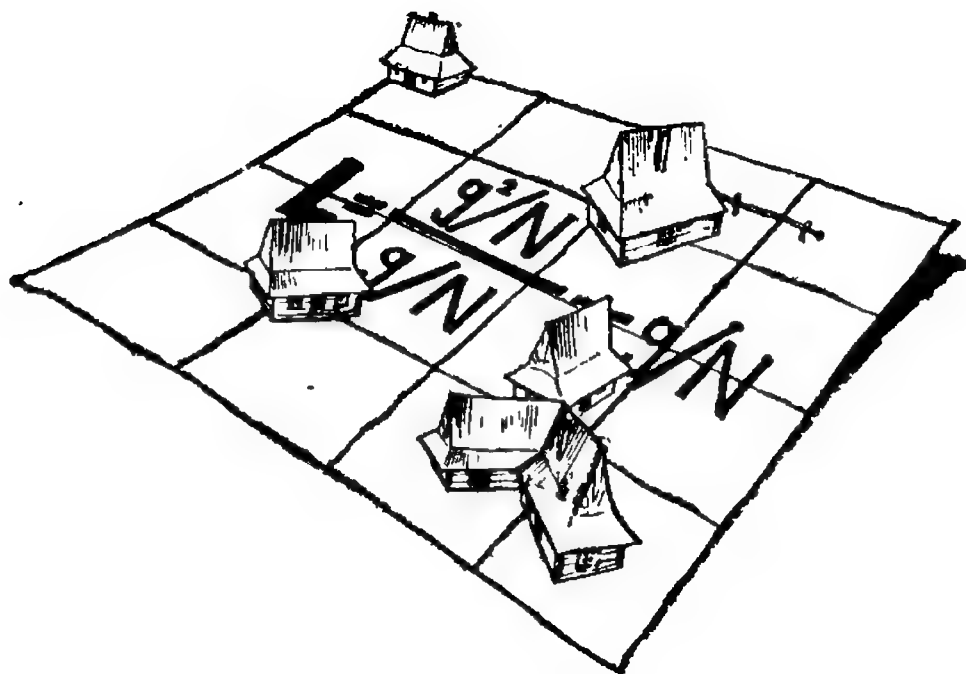


спад характеристики справа от пика. Отсюда следует, что центр деревни застроен довольно свободно и домов, выстроившихся вдоль улицы, как в равнинных деревнях, в ней вообще нет.

Шифр, присланный нам в виде графика, можно было бы расшифровать еще подробнее, но мы предоставим это терпению читателя.

Для чего нужно отгадывание таких ребусов? Ведь гораздо проще взять подробный план местности и без всяких вычислений увидеть, как разбросаны дома в деревне. Однако задача не так проста, как может показаться.

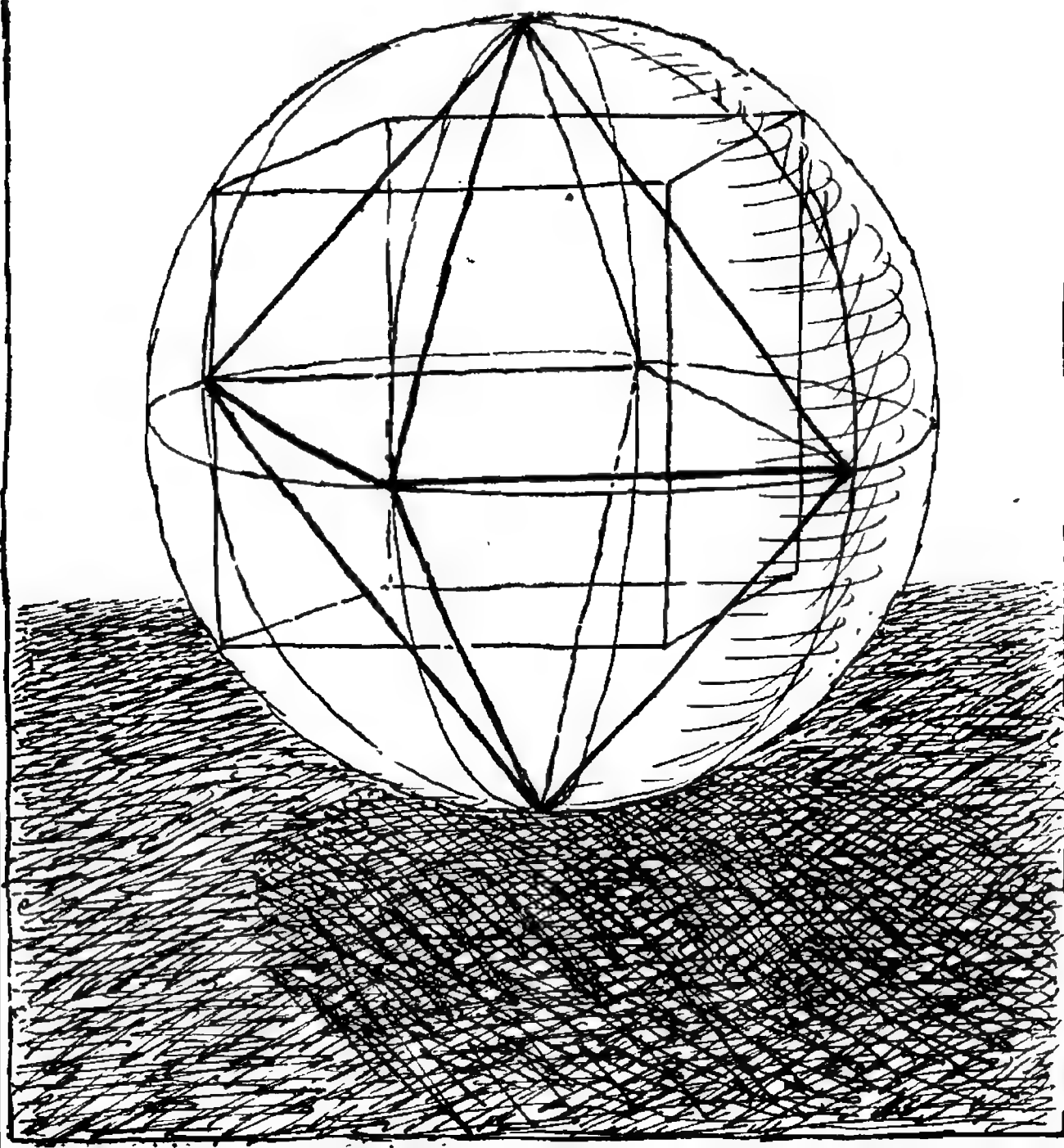
Предположим, что требуется сравнить планировку многих деревень (например, для того, чтобы узнать, в какой последовательности они строились, и выявить общие закономерности). Выявить различие и обнаружить сходство простым сравнением карт не так-то просто, но если для каждой деревни построить такую характеристику, как для нашей деревушки в горах, то и сходство и различие сразу же бросятся в глаза: кривые будут крутыми и пологими, с одним, двумя или несколькими горбами, их можно также отличать по некоторым численным характеристикам, например по положению и высоте пиков и впадин. Например, одни астрономы утверждают, что звезды выстраиваются вдоль прямых, словно нанизываясь на невидимые нити, как четки. Другие им возражают. Чтобы решить спор, со звездами необходимо поступить так же, как мы действовали с



городами, домами, каплями дождя. Был предложен и другой способ, а именно: сравнение истинной карты звездного неба с искусственной, на которой точки распределены случайным образом. Такое сравнение позволяет установить, где больше «четок»: на истинной или на искусственной карте. Для составления искусственной карты используется таблица случайных чисел, о которой мы уже рассказывали. Из нее выбирают пары чисел, откладывают вдоль горизонтального и вертикального обреза карты столько миллиметров, сколько единиц в этих числах, и для каждой пары случайных чисел получают на карте одну точку.

Далеко мы ушли от орла и решки, добрались до самых звезд, но везде снова и снова встречали на своем пути случайные явления. В начале книги мы хотели разгадать тайны случайной игры. И хотя нам так и не удалось открыть чернокнижный секрет, который позволил бы неизменно выигрывать, но зато мы узнали, что многие другие тайны можно постичь, присмотревшись как следует к удивительным закономерностям подбрасываемой монетки.

# ЕЩЕ СТО ЗАДАЧ



## ЧИСЛОВАЯ РЕШЕТКА, НЕРАВЕНСТВА И ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

**1. Узлы целочисленной решетки на окружности.** Целочисленной решеткой (или, кратко, просто решеткой) называется множество всех точек  $(x, y)$  плоскости, координаты которых  $x$  и  $y$  принимают лишь целочисленные значения. Здесь  $x$  означает абсциссу, а  $y$  — ординату точки  $(x, y)$  в прямоугольной системе координат. Точки решетки обычно принято называть узлами.

Доказать, что окружность с центром в точке  $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$  в зависимости от радиуса либо проходит через один узел решетки, либо не проходит ни через один ее узел и что среди окружностей с центром в точке  $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$  ни одна не проходит через два или большее число узлов.

**2. Узлы целочисленной решетки внутри окружности.** Рассмотрим узлы решетки, оказавшиеся внутри окружности  $K$  («окруженные» окружностью  $K$ ). Узлы решетки, лежащие на самой окружности  $K$ , не считаются лежащими внутри  $K$ .

Доказать, что существует окружность, внутри которой находится один узел решетки, два узла и т. д. Вообще для любого  $n$  (натурального или равного нулю) можно указать окружность, внутри которой находятся ровно  $n$  узлов решетки.

**3. Окружность и целочисленная решетка.** Построить наибольшую окружность, внутри которой лежат: а) 0 узлов решетки; б) 1 узел решетки; в) 2 узла решетки; г) 3 узла решетки; д) 4 узла решетки; е) 5 узлов решетки. Для каждого случая вычислить диаметр окружности.

**4. Окружности, перемещающиеся по решетке.** Существуют окружности, внутри которых в зависимости от того, как они расположены относительно решетки, могут находиться 1, 2, 3 и 4 узла. Иначе говоря, существуют окружности постоянного диаметра, для которых все четыре возможных случая (и только они) одинаково выполнимы. Что можно сказать о диаметре таких окружностей?

Наибольшую окружность, внутри которой (в некотором положении) содержатся 4 узла решетки, можно передвинуть так, чтобы внутри нее оказалось 9, 8 или 7 узлов решетки. Можно ли так передвинуть окружность, чтобы внутри нее оказалось 5, 6 или 10 узлов?

**5. Четыре числа.** Пользуясь геометрическими соображениями, доказать, что не существует четырех чисел  $a, b, c$  и  $d$ , удовлетворяющих условиям

$$0 < a < b < c < d, \quad a + d = b + c, \quad a^2 + d^2 = b^2 + c^2.$$

**6. Два множества.** Разобьем отрезок  $[0, 1]$  на два множества  $A$  и  $B$  (например, отнесем к множеству  $A$  все точки с рациональной координатой  $x$ , а к множеству  $B$  — все точки с иррациональной координатой  $x$ ).

Требуется определить на  $[0, 1]$  непрерывную функцию  $f(x)$  так, чтобы для  $x$ , принадлежащих множеству  $A$ , значения  $f(x)$  принадлежали множеству  $B$ , а для  $x$ , принадлежащих множеству  $B$ , значения  $f(x)$  принадлежали множеству  $A$ .

Возможно ли это?

**7. Приближенная оценка.** Выяснить, какому неравенству удовлетворяет число

$$x = \sqrt{5 + \sqrt{3 + \sqrt{5 + \sqrt{3 + \dots}}}}$$

$x > 3$  или  $x < 3$ ?

**8. Неравенство.** Доказать, что для любых целых чисел  $p$  и  $q$ ,  $q \neq 0$ , справедливо неравенство

$$\left| \sqrt{2} - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{3q^2}.$$

**9. Непрерывная дробь.** Последовательность  $\{a_n\}$  представляет собой некоторую перестановку натуральных чисел (каждое натуральное число входит в  $\{a_n\}$  один и только один раз). Обозначим  $\xi(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$  непрерывную дробь

$$\frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}}.$$

Доказать, что  $\xi$  не может принимать ни одного значения из замкнутого интервала  $[1/2, 2/3]$ . Существуют ли такие «недоступные» для  $\xi$  значения в открытом интервале  $(0, 1)$ ?

**10. Числовая последовательность.** Найти последовательность  $a_0, a_1, a_2, \dots$  положительных чисел ( $a_0 = 1$ ), элементы которой при  $n = 0, 1, 2, \dots$  удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$a_n - a_{n+1} = a_{n+2}.$$

Доказать, что существует лишь одна такая последовательность.

**11. Квадрат.** Можно ли построить квадрат с целочисленными сторонами и указать в его плоскости такую точку, чтобы расстояния от этой точки до всех 4 вершин квадрата выражались целыми числами?

*Примечание.* Решение этой весьма трудной задачи мне не известно.

**12. Интересный радикал.** Доказать, что при любом натуральном  $n$  выражение

$$\sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \dots + \sqrt{n}}}}$$

принимает значения, меньшие 2.

**13. Треугольник с особыми свойствами.** Существует ли треугольник с целочисленными сторонами  $a$ ,  $b$  и  $c$ , у которого высота, опущенная на основание, равна основанию?



**14. Диофантово уравнение.** Найти четыре натуральных числа  $a, b, c$  и  $d$ , удовлетворяющих уравнению

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{d} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c},$$

при условии, что  $a < b < c < d$ .

Могут ли числа  $a, b, c, d$  быть простыми?

## ПЛОСКОСТЬ, ОКРУЖНОСТИ И МНОГОУГОЛЬНИКИ

**15. Перекатывание четырехгранника по плоскости.** Представим себе, что четырехгранник, все грани которого имеют форму конгруэнтных треугольников с произвольно заданными сторонами  $k, l, m^*$ , мы перекатываем по плоскости, поворачивая вокруг одного из ребер основания. Ребро, служащее осью поворота, мы каждый раз выбираем независимо.

Всегда ли многогранник, который перекатывали по плоскости сколь угодно долго, можно вернуть в исходное положение путем, нигде не совпадающим с первоначальным? (Под «несовпадением» путей мы понимаем следующее: если грани нашего четырехгранника выкрасить какой-нибудь краской и считать, что при перекатывании каждая грань оставляет на плоскости отпечаток, то лишь последний отпечаток должен совпасть с первым, а все остальные отпечатки нигде перекрываться не могут.)

**16. Круг и кружок.** По периметру круга радиуса 6 см извне катится кружок радиуса 3 см. К меньшему кругу на расстоянии 1 см от его центра «прикреплена» точка. Пока меньший круг совершает полный обход периметра большего круга, точка описывает некоторую замкнутую кривую.

Требуется:

- 1) доказать, что равносторонний треугольник  $T$ , вписанный в эту кривую, можно двигать так, что все три его вершины одновременно опишут всю кривую;
- 2) вычислить длину стороны треугольника  $T$ ;

---

\* Возможность построения такого четырехгранника доказана в книге Г. Штейнгауз, Сто задач, М., Физматгиз, 1959 (задача 37). — Прим. перев.

3) построить траекторию, которую описывает центр треугольника  $T$ , когда его вершины движутся так, как сказано в условии 1.

**17. Две окружности и линейка.** Рассмотрим на плоскости две концентрические окружности различных радиусов. Вполне очевидно, что их можно одновременно начертить концами линейки (отрезка прямой), длина которой равна разности их радиусов. Не менее очевидно, что при подходящем выборе отрезка мы сможем одновременно описать две одинаковые окружности, как бы они ни были расположены на плоскости.

Каким необходимым и достаточным условиям должны удовлетворять радиусы окружностей; расстояние между их центрами и длина линейки, чтобы концами линейки можно было одновременно описать обе окружности?

**18. Вписанный параллелограмм.** Пусть  $G$  — выпуклая область. Той же буквой  $G$  обозначим и ее площадь. Говоря о выпуклости, мы имеем в виду выпуклость в строгом смысле, то есть предполагаем, что граница области  $G$  не содержит ни отрезков прямых, ни точек излома. Иначе говоря, в каждой точке границы области  $G$  существует одна и только одна касательная, и каждая касательная имеет с границей области  $G$  одну и только одну общую точку. Пусть  $PQRS$  — четырехугольник, описанный вокруг  $G$  и имеющий наименьшую площадь по сравнению со всеми четырехугольниками, описанными вокруг  $G$ , а  $A, B, C$  и  $D$  — точки касания сторон  $PQ, QR, RS$  и  $SP$  четырехугольника с границей области  $G$ .

Доказать, что  $ABCD$  — параллелограмм с площадью, превышающей  $G/2$ .

**19. Описанный параллелограмм.** Пусть  $G$  — выпуклая область, о которой говорится в условии предыдущей задачи, а  $ABCD$  — четырехугольник наименьшей площади среди всех вписанных в  $G$  четырехугольников. Проведем в точках  $A, B, C$  и  $D$  касательные к  $G$  и получим четырехугольник  $PQRS$ .

Доказать, что  $PQRS$  — параллелограмм, описанный вокруг  $G$ , и что его площадь меньше  $2G$ .

**20. Пространственный пятиугольник.** Можно ли построить в трехмерном пространстве замкнутый пятиугольник, все стороны которого равны, а все углы прямые?

**21. Равносторонний «нечетноугольник» с прямыми углами.** Можно ли построить в трехмерном пространстве замкнутый многоугольник с нечетным числом сторон, у которого все стороны равны, а все углы прямые?

**22. Квадрат и кривая.** Построить гладкую выпуклую замкнутую кривую, отличную от окружности, вокруг которой можно было бы описать квадрат так, чтобы его размеры не изменялись при изменении точки касания: при переходе от точки  $P$ , с которой было начато построение квадрата, к произвольной точке  $Q$  кривой. Иначе говоря, квадрат, описанный вокруг кривой, можно, не меняя его размеров, вращать вокруг кривой, причем все его стороны неизменно касаются кривой (окружность обладает этим свойством).

**23. Центр тяжести.** В вершинах треугольника  $ABC$  помещены материальные точки: в вершине  $A$  — точка с массой, равной длине стороны  $BC$ , в вершине  $B$  — точка с массой, равной длине стороны  $CA$ , и в вершине  $C$  — точка с массой, равной длине стороны  $AB$ .

Требуется доказать, что центр тяжести системы трех материальных точек совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ .

**24. Описанная окружность.** Круг, граница которого проходит через 4 вершины прямоугольника, — наименьший из всех кругов, накрывающих данный прямоугольник. Наибольших кругов, вписанных в прямоугольник, имеется бесконечно много. Назовем *описанным кругом плоской фигуры  $F$*  наименьший из кругов, накрывающих  $F$ , а *вписанным кругом фигуры  $F$*  — наибольший из кругов, целиком заключенных внутри  $F$ .

Доказать, что независимо от того, какую форму имеет фигура  $F$  (если только она ограничена), всегда существует лишь один описанный круг.

**25. Остроугольный треугольник.** Каждый ли остроугольный треугольник можно разделить на три равновеликие части перпендикулярами, восстановленными к

сторонам треугольника и пересекающимися в некоторой точке, расположенной внутри него?

**26. Точки в круге.** На плоскости имеются 10 точек и окружность, внутри которой все они лежат. Переместим все точки так, чтобы расстояние между любыми двумя из них уменьшилось.

Можно ли провести окружность меньшего радиуса так, чтобы все 10 точек после перемещения оказались внутри нее?

Выберем на плоскости  $n$  точек ( $n$  — произвольное натуральное число) внутри круга. Переместим их так, чтобы расстояния между любыми двумя из них уменьшились.

Всегда ли можно провести окружность меньшего радиуса так, чтобы все точки в новом положении оказались внутри нее?

**27. Проволочный треугольник.** Из куска однородной проволоки сделан треугольник  $PQR$ . Приняв середины его сторон за вершины нового треугольника (с вдвое меньшими сторонами), соединим центр тяжести треугольника  $PQR$  с вершинами малого треугольника отрезками прямых.

Доказать, что проведенные отрезки служат биссектрисами внутренних углов малого треугольника \*.

**28.  $n$ -угольник.** Каким необходимым и достаточным условиям должны удовлетворять числа  $b_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) для того, чтобы существовал  $n$ -угольник со сторонами  $b_1, b_2, \dots, b_n$  (последовательность сторон и чисел одинакова)?

**29. Еще раз о  $n$ -угольнике.** Предположим, что последовательность чисел  $b_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) удовлетворяет необходимым и достаточным условиям, о которых говорится в предыдущей задаче. Тогда, сохраняя последовательность сторон, мы можем построить  $n$ -угольник максимальной площади среди всех  $n$ -угольников со сторонами  $b_k$ .

Зависит ли максимальная площадь от последовательности чисел  $b_k$ ? Иначе говоря, изменится ли максимальная площадь  $n$ -угольника, если, сохранив набор

---

\* См. также задачу 23.

сторон  $b_k$ , мы изменим последовательность, в которой они встречаются при обходе периметра  $n$ -угольника?

**30. Вписанный  $n$ -угольник.** Доказать, что если существует  $n$ -угольник с данными сторонами  $b_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), то существует также  $n$ -угольник с теми же сторонами, взятыми в той же последовательности, вписанный в некоторый круг.

**31. Разбиение плоскости.** Окружность делит плоскость на две части. Двумя окружностями плоскость можно разделить на четыре части. Начертив еще одну, третью, окружность, мы разобьем плоскость на восемь частей.

Можно ли расположить на плоскости четыре окружности так, чтобы они делили плоскость на 16 частей?

**32. Еще раз о разбиении плоскости.** Доказать, что при любом натуральном  $n$  можно указать такое расположение окружностей на плоскости, при котором плоскость будет разбита на  $n(n-1)+2$  части.

Всегда ли можно разбить плоскость на  $n(n-1)+2$  части  $n$  окружностями одинакового радиуса?

**33. Площадь шестиугольника.** Доказать, что площадь шестиугольника со сторонами, меньшими 1, меньше 2,6.

**34. Точки в овале.** На плоскости внутри овала (именно внутри, а не на его границе) заданы  $n$  точек. Овал можно разгородить на участки так, чтобы, во-первых, внутри каждого участка находилась лишь одна точка  $P$  из  $n$  заданных точек, во-вторых, «владельцу» любого участка до «своей» точки  $P$  было ближе, чем до «чужой», и, в-третьих, изгороди-многоугольники содержали криволинейные участки лишь там, где граница участка совпадает с границей овала.

Внутри овала изгороди образуют сеть ломаных из  $L$  звеньев. Чему равно максимальное значение  $L$  при данном  $n$ ?

**35. 23 точки на окружности.** Длина окружности  $K$  составляет 50 см. На  $K$  произвольно размещены 23 точки, образующие множество  $Z$  (таким образом, множество  $Z$  содержит 23 различных элемента).

Дугу  $L$  длиной 7 см с концами  $A$  и  $B$  будем двигать вдоль окружности  $K$  по часовой стрелке. Требуется доказать следующие два утверждения:

Утверждение I. В некоторый момент времени дуга  $L$  займет такое положение, что ей будут принадлежать ровно 3 точки множества  $Z$ .

Утверждение II. В некоторый момент времени дуга  $L$  займет положение, в котором ей будут принадлежать ровно 4 точки множества  $Z$ .

*Примечание.* Конец  $A$  считается принадлежащим дуге  $L$ , а конец  $B$  не принадлежит дуге  $L$ . Выражение «дуга  $L$  содержит ровно  $n$  точек множества  $Z$ » в соответствии с принятым соглашением следует понимать так, что дуга  $L$  содержит  $n$  точек множества  $Z$ , не совпадающих с ее концом  $B$ .

36. **Два креста.** Назовем крестом фигуру, образованную двумя взаимно перпендикулярными отрезками, которые делятся пополам в точке пересечения. Сами отрезки условимся называть перекладинами креста, а точку их пересечения — центром креста. Кресты с несовпадающими центрами и попарно параллельными перекладинами назовем параллельными.

Будем говорить о замкнутом многоугольнике, что он выпуклый, если его внутренние углы меньше  $180^\circ$  (поскольку ни один внутренний угол не может быть равным  $180^\circ$ ).

Требуется доказать, что нельзя построить такой выпуклый многоугольник, чтобы все концы двух параллельных крестов совпадали с некоторыми его верши-

нами. (Число вершин многоугольника может быть сколь угодно большим).

37. Центр круга. Вычислить координаты  $x_0, y_0$  центра круга площадью 10 квадратных единиц, содержащего внутри себя 10 узлов квадратной решетки со стороной элементарного квадрата, равной 1. Координаты центра круга должны удовлетворять неравенствам  $0 \leq x_0 \leq y_0 \leq 1$ .

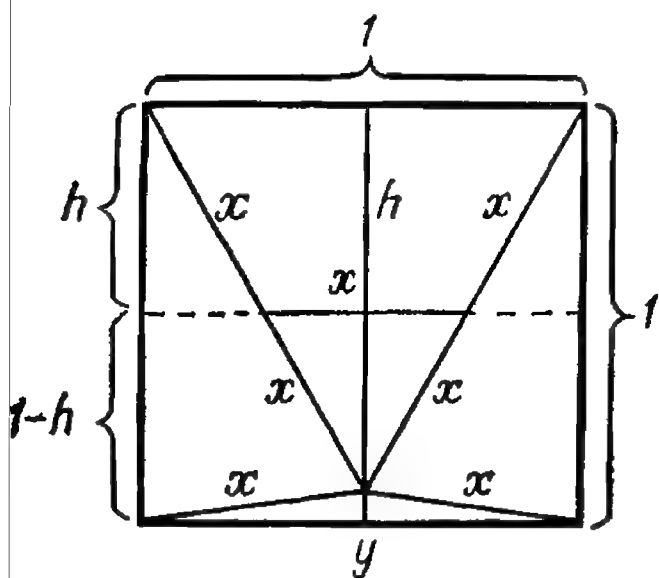


Рис. 1.



**38. Семь точек в квадрате.** В единичном квадрате требуется разместить семь точек: четыре — в вершинах и три — внутри квадрата (рис. 1). Соединив попарно все семь точек, получим 21 отрезок. На рис. 1 изображено лишь семь кратчайших отрезков (каждый такой отрезок и его длина обозначены  $x$ ). Смысл буквы  $h$  ясен из рисунка,  $y$  означает высоту треугольника, основание которого совпадает с нижней стороной квадрата, а боковые стороны равны  $x$ .

Требуется вычислить длину отрезков  $x$ ,  $h$  и  $y$ .

## ПРОСТРАНСТВО, СФЕРЫ И МНОГОГРАННИКИ

**39. Тетраэдры.** Имеется 6 палочек различной длины. В каком бы порядке ни брать эти палочки, из них всегда можно склеить остов тетраэдра. Сколько различных тетраэдров при этом получится?

**40. «Пронзенный» куб.** Из 27 одинаковых кубиков сложили один большой куб. Провести прямую, которая бы «пронзала» наибольшее число малых кубиков, и найти это число. Проведенная прямая не должна пересекать ребра кубиков.

**41. Заполнение пространства сферами.** Плотнейшая укладка одинаковых сфер в пространстве известна давно (см., например, фотографии на стр. 100—101 книги: Г. Штейнгауз, Математический калейдоскоп, М.—Л., Гостехиздат, 1949). При такой укладке сфер единичного радиуса между ними возникают промежутки двух типов: большие и малые. Эти промежутки можно заполнить меньшими сферами, взяв их также двух калибров: в большие промежутки поместить сферы одного калибра, в малые — другого. Радиусы тех и других сфер следует подобрать так, чтобы они плотно входили в пустоты и не могли сдвигаться с места.

В скольких точках каждая сфера меньшего калибра касается единичных сфер и в скольких точках касается их каждая сфера большего калибра? Чему равны радиусы сфер, заполняющих промежутки между единичными сферами?

**42. Производные многогранники.** Взяв произвольный многогранник, построим другой многогранник, который назовем производным от данного, следующим образом.

Через центр сферы  $K$  проведем плоскости, параллельные граням данного многогранника. С поверхностью сферы  $K$  эти плоскости пересекаются по дугам больших кругов, образующих сферические многоугольники. Заменяв каждую сторону сферического многоугольника хордой, получим ребра производного многогранника (он вписан в сферу  $K$ ). Если у данного многогранника имеются две параллельные грани, то на сфере  $K$  им соответствует лишь один большой круг. Проводя описанное выше построение для известных многогранников, получим их производные многогранники, вид которых и требуется определить.

Итак, построить производный многогранник:

- 1) для правильного тетраэдра;
- 2) для куба;
- 3) для правильного октаэдра;
- 4) для додекаэдра;
- 5) для икосаэдра.

**43. Расстояние между точками на поверхности.** Между любыми двумя точками на замкнутой выпуклой (невогнутой) поверхности можно провести дугу, которая будет кратчайшей среди всех дуг, соединяющих эти две точки. (Вполне возможно, что среди дуг, соединяющих две данные точки, окажется несколько кратчайших. Например, на сфере диаметрально противоположные точки — точки-антиподы — соединены бесконечно многими кратчайшими дугами больших кругов.)

Определим расстояние между любыми двумя точками  $P$  и  $Q$  на поверхности как длину кратчайшей дуги, соединяющей  $P$  и  $Q$ . Тем самым мы получим возможность измерять расстояние между данной точкой  $P$  и произвольной точкой  $X$  поверхности.

Среди всех точек поверхности найдем (быть может, не единственную) точку  $S$ , наиболее удаленную от данной точки  $P$ . Можно было бы предположить, что точки  $P$  и  $S$  всегда соединены по крайней мере двумя кратчайшими дугами.

Требуется доказать, что такое предположение оказывается неверным уже для некоторых четырехгранников.

**44. Замкнутая поверхность.** Все сечения некоторой замкнутой поверхности плоскостями имеют форму окружности (если сечение состоит из одной-единственной

точки, то мы рассматриваем ее как окружность с радиусом, равным нулю).

Доказать, что эта замкнутая поверхность — сфера.

**45. Выпуклая поверхность.** Можно ли построить замкнутую выпуклую поверхность, отличную от сферической и такую, что все плоскости, проходящие через некоторую надлежащим образом выбранную прямую, пересекают эту поверхность по окружностям?

**46. Точка в кубе.** Условимся называть числа  $u, v, w$  арифметически независимыми, если соотношение

$$pu + qv + rw = 0$$

не выполняется ни при каких числах  $(p, q, r)$ , кроме  $(0, 0, 0)$ .

Вообразим куб, ребра которого параллельны осям прямоугольной системы координат, и в нем — безостановочно движущуюся материальную точку  $M$  (внешние силы на точку  $M$  не действуют). В начальный момент времени  $t = 0$  точка  $M$  имеет отличную от нуля скорость, а от стен куба отражается по закону «угол падения равен углу отражения». Составляющие  $u, v, w$  скорости частицы арифметически независимы.

Доказать, что движущаяся точка  $M$  никогда не вернется в исходное положение.

**47. Многогранники.** Какие из правильных (платоновых) многогранников обладают тем свойством, что на их гранях можно разместить натуральные числа (по одному числу на каждой грани, никаких других ограничений на числа не накладывается) так, чтобы, во-первых, числа на смежных гранях были взаимно просты и, во-вторых, числа на несмежных гранях имели общий делитель, отличный от 1?

**48. Три сферы и прямая.** Три сферы имеют общую точку  $P$ , но ни одна прямая, проходящая через  $P$ , не касается всех трех сфер сразу.

Доказать, что сферы имеют еще одну общую точку.

**49. Четыре точки на сфере.** Соединив попарно отрезками прямых четыре точки, лежащие на сфере, получим тетраэдр. Доказать, что объем тетраэдра будет наибольшим, когда расстояния между любыми двумя из четырех

точек будут одинаковыми (то есть когда тетраэдр будет правильным).

**50. Четыре прямые и еще одна пятая прямая.** В трехмерном пространстве провести четыре непараллельные и непересекающиеся прямые так, чтобы никакая пятая прямая не пересекала все четыре прямые.

**51. Разбиение куба.** Разбить куб на 6 четырехгранников, из которых 3 равны, а остальные 3 совпадают с тремя первыми при зеркальном отражении.

**52. Тетраэдр и куб.** Проволочную модель тетраэдра («скелет» из 6 проволочек-ребер) можно дополнить до полного тела, соединяя материальными отрезками все возможные пары точек, лежащих на различных ребрах.

Рассмотрим проволочную модель другого тела — «скелет» куба, состоящий из 12 ребер. Можно ли ее дополнить до модели телесного куба тем же способом, что и проволочную модель тетраэдра?

**53. Раздел земли.** Квадратный участок земли требуется разделить на три равновеликие части. Разделить участок на три прямоугольника так, чтобы общая длина границ раздела составляла  $\frac{5}{3}$  стороны квадрата, нетрудно. Можно ли уменьшить протяженность границ раздела, если участок разбить на части, форма которых отлична от прямоугольной?

**54. Лучи в пространстве.** Три ребра куба, выходящие из одной и той же вершины, образуют друг с другом углы в  $90^\circ$ . В трехмерном пространстве можно также найти четыре луча, выходящие из одной и той же точки и образующие друг с другом один и тот же угол. Требуется вычислить этот угол. Можно ли указать в трехмерном пространстве пять лучей, обладающих теми же свойствами?

**55. Правильный двадцатигранник (икосаэдр).** Под каким углом видно ребро правильного двадцатигранника из его центра?

**56. Разбиение сферы.** Точка  $C$  — вершина правильного тетраэдра и одновременно центр сферы  $S$ . Сфера так мала, что пересекает три ребра тетраэдра, выходя-

щих из вершины  $S$ . Тем самым тетраэдр делит сферу на две части: большую, лежащую вне тетраэдра, и меньшую, лежащую внутри него.

Чему равно отношение большей и меньшей частей сферы?

### ЗАДАЧИ ПРАКТИЧНЫЕ И... НЕПРАКТИЧНЫЕ

**57. Взвешивание.** Пять различных по весу предметов требуется расположить в порядке убывания их веса. Пользоваться можно только простейшими весами без гирь, которые позволяют лишь установить, какой из двух сравниваемых по весу предметов тяжелее.

Как следует действовать, чтобы решить задачу оптимальным образом, то есть так, чтобы число взвешиваний было минимальным? Сколько взвешиваний придется при этом произвести?

**58. Задача о табаке.** Адам, Богдан и Вацлав живут вместе и берут табак для трубок из большой пачки, которая стоит 120 злотых. Если бы Вацлав не курил, то Адаму и Богдану пачки табаку хватило на 30 дней. Если бы не курил Богдан, то два остальных курильщика имели табаку на 15 дней. Если бы не курил Адам, то его соседи по комнате исчерпали запас табаку за 12 дней. На сколько дней хватит пачки табаку всем трем курильщикам и сколько каждый из них должен заплатить за табак?

**59. Ширина цеха.** В цехе на двух деревянных валиках перпендикулярно их осям лежит рельс длиной 15 м. Оси валиков параллельны стене цеха, которой касается конец рельса. Расстояние от этой стены до оси ближайшего валика равно 5 м. Рельс катят на валиках до тех пор, пока его конец не окажется над осью ближайшего валика. Именно в этот момент другой конец рельса упирается в противоположную стену цеха. Чему равна ширина цеха от стены до стены?

**60. Вроцлавская игра.** Участники игры вносят в «банк» по 1 злотому, а затем выбирают какой-нибудь вопрос так, чтобы, во-первых, никто из участников не располагал точной информацией, необходимой для ответа

на него, и, во-вторых, чтобы он допускал количественные ответы. Например, можно спросить: «Какова высота зала, в котором мы играем, в сантиметрах?» Каждый участник записывает свой ответ на листке бумаги и скрепляет его своей подписью. После этого листки собирают и вычисляют среднее арифметическое всех оценок. Тот участник игры, чей ответ окажется наиболее близким к средней оценке, забирает весь банк. Двое партнеров, сговорившись между собой, могут значительно повысить свои шансы на успех. Каким образом? Как следует изменить правила вроцлавской игры, чтобы уменьшить опасность возникновения подобной ситуации?

**61. Таз и глобус.** На горизонтальной подставке (крышке стола) стоит жестяной таз, имеющий форму сферической чаши (или, точнее, сегмента сферы). В нем лежит малый глобус. Вертикальная прямая, проходящая через точку касания глобуса и таза, служит одновременно осью симметрии и жестяного сегмента, и глобуса. Каждую точку, указанную на глобусе, можно спроецировать на таз, проведя через нее горизонтальную прямую, пересекающую общую ось симметрии таза и глобуса. При такой проекции изображение каждой страны, нанесенной на глобус, переходит на таз в несколько увеличенном виде.

Требуется доказать, что площадь всех стран при проецировании с глобуса на таз увеличивается в одно и то же число раз.

**62. Шар в сетке.** Сетка сплетена из 12 шнурков длиной 10 см каждый. Внутри сетки помещают шарик, который затем раздувают до тех пор, пока позволят шнурки. В результате шар оказывается туго оплетенным шнурками, прилегающими к нему вдоль всей своей длины. Восемь узлов сетки располагаются на поверхности шара так, что образуют вершины куба.

Вычислить объем максимального шара, помещающегося в сетке.

**63. Морские маневры.** Во время маневров в открытом океане командиры кораблей *A*, *B* и *C* получили от адмирала лаконичный приказ: в максимально короткий срок сосредоточиться в одном районе. Благодаря без-



отказно действовавшей радиосвязи командирам были известны расстояния между кораблями в момент получения приказа:  $AB = 100$  миль,  $AC = 200$  миль и  $BC = 220$  миль. Максимальные скорости, которые могут развивать корабли, равны: для  $A$  — 15 узлов, для  $B$  — 20 узлов и для  $C$  — 12 узлов\*.

Как выполнить приказ адмирала?

**64. Фальшивая монета.** Даны 4 совершенно одинаковые по внешнему виду монеты. Каждая из них должна весить 5 г, однако известно, что одна (и только одна) монета имеет иной вес.

Как, пользуясь равноплечими весами и одной пятиграммовой гирькой, с помощью двух взвешиваний определить фальшивую монету и установить, тяжелее она или легче полновесной монеты?

**65. Дорожная сеть.** Четыре города  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$  требуется соединить дорожной сетью. Поскольку расходы на строительство дорог желательно свести к минимуму, дорожная сеть, вообще говоря, должна иметь развилки.

Требуется доказать, что экономичная дорожная сеть всегда содержит не более двух развилок.

**66. Швеи.** Некий портной решил открыть швейную мастерскую. У него было 5 швейных машин различных марок, предназначенных для выполнения различных работ. На объявление в газете откликнулось семеро кандидатов в швеи. Каждой из них портной дал поработать в течение часа на каждой из 5 машин, а затем оценил производительность труда в злотых (взяв разность между стоимостью готового изделия и стоимостью ис-

---

\* Принятая у моряков мера скорости может быть не известна «сухопутным» читателям, поэтому мы сочли уместным воспользоваться разъяснением столь непререкаемого авторитета, как капитан 2-го ранга Василий Лукич Кирдяга, с рассказами которого широкий круг читателей знаком по книге Леонида Соболева «Морская душа»: «Скорость корабля выражается мерой — узлами, означающими скорость в морских милях в час. Тросик лага, выпускаемый на ходу с кормы, разбивается узелками на расстоянии  $1/120$  мили (50 футов). Сосчитав число узелков, пробежавших за полминуты —  $1/120$  часа, можно прямо узнать скорость в морских милях в час». — *Прим. перев.*

пользованного материала). В результате у него получилась следующая таблица:

Машина Швея	I	II	III	IV	V
A	4	3	5	8	12
B	10	4	6	8	8
C	15	1	12	11	11
D	11	9	5	8	14
E	1	10	3	9	12
F	4	7	11	3	2
G	5	2	2	10	1

Каких кандидатов следует принять портному и как распределить машины между принятыми швеями?

**67. Погоня.** Шесть полицейских катеров окружили моторную лодку контрабандиста. Полицейские катера расположились в вершинах, а лодка контрабандиста — в центре правильного шестиугольника. Лодка контрабандиста может развивать скорость 25 узлов, полицейские катера — 20 узлов. Контрабандисту известно, что начальник отряда приказал своим людям держать курс прямо на лодку контрабандиста.

Может ли контрабандист вырваться из западни и уйти от погони и если да, то как?

**68. Космонавт.** Оказавшийся на одной из малых планет космонавт отправился из точки  $P_0$ , в которой он совершил мягкую посадку, в наиболее удаленную от нее точку  $P_1$ . Прибыв в  $P_1$  и немного отдохнув, космонавт направился в наиболее удаленную от нее точку  $P_2$ , намереваясь и впредь развивать несколько необычную форму туризма, как вдруг понял, что поскольку  $P_2 \neq P_0$ , то его маршрут никогда не приведет в точку  $P_0$ . Почему?

**69. Горное озеро.** У одного горного озера имеется любопытная особенность: в какой бы его точке ни находилась лодка с туристами, им никогда не удастся окинуть взглядом все озеро сразу, и поэтому, желая полюбоваться всеми красотами озера, туристы вынуждены менять положение своего «наблюдательного пункта».

Доказать, что если бы на озере нашлась точка, из

которой можно было охватить взглядом сразу всю его поверхность, то совокупность всех таких точек заполнила бы некоторую выпуклую область.

**70. Карта.** В школе на стене висит карта, имеющая форму прямоугольника. Аналогичная карта — уменьшенная копия первой, аккуратно начерченная на прямоугольном листе кальки, — имеется у одного из учеников. Перед своими одноклассниками этот ученик хвастался тем, что сколько бы раз и в каком бы месте ни прикладывать кальку к школьной карте, на ней непременно найдется точка, совпадающая с точкой школьной карты, которая соответствует той же самой точке на местности. Более того, замеченный эффект не исчезает, даже если накладывать кальку на карту не прямо, а косо (то есть так, чтобы края карт не были параллельны).

Верно ли утверждение счастливого обладателя кальки?

**71. Банка и шнурок.** Высота цилиндрической банки равна радиусу основания. Банка обвязана шнурком, лежащим в плоскости осевого сечения цилиндра и проходящим через два углубления в ребре нижнего основания. Шнурок туго натянут.

Можно ли снять шнурок с банки, не растягивая его и не разрывая? В каком положении находится шнурок — в устойчивом или неустойчивом?

**72. Группы крови.** Еще в 1919 г. Ландштейнер, Янский и Мосс установили, что кровь у людей бывает четырех групп: О, А, В и АВ. Зная группу крови больного, можно заранее сказать, к какой из групп должна принадлежать кровь донора, чтобы переливание ее было безопасно для больного. Обозначим символом  $X \rightarrow Y$  утверждение: «Лицо, принадлежащее к группе X, всегда может быть донором по отношению к лицу, принадлежащему к группе Y». Тогда закон, открытый названными учеными, можно сформулировать следующим образом:

I.  $X \rightarrow X$  для каждого X.

II.  $O \rightarrow X$  для каждого X.

III.  $X \rightarrow AB$  для каждого X.

IV. Все отношения  $X \rightarrow Y$ , не следующие из пп. I—III, ложны.

Доказать, что:

- 1) система правил I—IV непротиворечива;
- 2) если правила I—IV верны, то для любых  $X, Y, Z$  из  $X \rightarrow Y$  и  $Y \rightarrow Z$  следует  $X \rightarrow Z$ ;
- 3) из правил I—IV следует  $\overline{(A \rightarrow B)}$ , то есть отрицание отношения  $A \rightarrow B$ .

*Примечание.* Кванторы «для каждого» и «все» в правилах I—IV надлежит понимать в том смысле, что вместо  $X$  и  $Y$  можно подставлять любую из четырех групп крови O, A, B и AB.

**73. Еще раз о группах крови.** Три студента-медика решили определить свою группу крови, не пользуясь чужой кровью и готовыми сыворотками. Чтобы установить, истинно ли утверждение  $X \rightarrow Y$  (смысл символа  $X \rightarrow Y$  объяснен в условии предыдущей задачи), достаточно иметь по капле крови  $X$  и  $Y$ . Что делать с каплями дальше, нам знать не нужно (хотя студенты-медики знали). Они установили групповую принадлежность двух членов тройки, но не смогли установить группу крови третьего студента. Поразмыслив, студенты пришли к выводу, что если бы группа крови третьего студента была им известна, то они могли бы открыть лабораторию по определению группы крови любого пациента, причем для установления групповой принадлежности пациентов им не потребовалась бы кровь тех двух студентов, чья группа крови известна.

Как объяснить столь парадоксальный вывод?

**74. Третий раз о группах крови.** Феликс Бернштейн, известный своими работами по теории множеств, сформулировал первый закон наследственности групп крови O, A, B, AB. Пусть, например, у отца группа крови A, а у матери AB. К однобуквенному символу A группы крови отца следует приписать справа букву O и превратить его в двухбуквенный символ AO. Чтобы получить группу крови ребенка, нужно образовать все возможные двухбуквенные комбинации, беря по одной букве от группы крови отца (AO) и матери (AB).

Получив символы AA, AB, OA и OB, их следует упростить: вместо двух одинаковых букв AA взять лишь одну (A) и опустить одну букву O всюду, где она встречается. В результате мы приходим к четырем символам: A, AB, A, B. Закон Ф. Бернштейна утверждает, что

кровь ребенка может принадлежать к одной из трех групп А, В, АВ (и не может принадлежать к группе О).

Перечисленные выше правила (приписывание буквы О к однобуквенным символам, образование двухбуквенных комбинаций из символов групп крови родителей, отбрасывание одной буквы в символах, состоящих из двух одинаковых букв, и стирание буквы О) полностью определяют, причем не только в рассмотренном нами примере, но и в общем случае, так называемую фенотипную теорию наследственности групп крови. Законы переливания крови сформулированы в задаче 72.

Два брата, знакомые и с фенотипной теорией наследственности групп крови, и с законами переливания, знали, что ни один из них не может дать кровь другому, но каждому из них могла бы дать кровь их мать.

Может ли сестра заменить мать и стать донором для братьев?

**75. Плитки в круге.** Имеются 64 квадратные плитки со стороной 10 см.

Как их следует уложить на плоскости, чтобы все 64 плитки можно было описать окружностью радиусом 50 см? Существуют ли окружности меньшего радиуса, способные вместить все 64 плитки?

**76. Еще раз о плитках.** Чему равно максимальное число квадратных плиток со стороной 10 см, которые можно расположить внутри круга радиусом 20 см?

**77. Старая башня.** Старая башня, ценный памятник архитектуры прошлого, имеет форму вертикально стоящей колонны, обозреть которую можно лишь с некоторого расстояния, поскольку хранители обнесли ее по окружности забором. Диаметр забора 10 м. Обходя башню вдоль забора, экскурсанты неизменно видят ее под прямым углом (речь идет об угле между горизонтальными лучами зрения, проведенными на уровне глаз). В отдельных местах забор стоит от башни лишь на 1 м, в других расстояние между забором и башней больше. Максимальное удаление равно 2 м.

Требуется определить возможный вид горизонтального сечения башни и его размеры.

**78. Доска и обрубок дерева.** Маленькие дети любят качаться на доске, положенной поперек лежащего на

земле бревна. Когда один ребенок поднимается вверх, другой опускается вниз, и наоборот. Если доска шероховатая и поверхность бревна также не обработана, то доска перекатывается по нему без скольжения. Нетрудно проверить, что если бревно имеет форму кругового цилиндра, то траектории обоих концов доски отличны от прямой.

Требуется доказать, что тем же свойством обладает обрубок дерева любого, а не только круглого, сечения.

## **НОВЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИКЛЮЧЕНИЯ ДОКТОРА СИЛЬВЕСТРА ШАРАДЕКА**

**79. Автомобильная задача.** Шофер одолжил у товарища по работе 3 кг керосина и 5 л бензина, слил то и другое в ведро, которое наполнилось до краев, и взвесил его. Когда через несколько дней коллега пришел за ведром, должник налил в ведро 3,5 л керосина и 4 кг бензина. Ведро снова наполнилось до краев, и вес его оказался таким же, как в первом случае. Бензин (так же, как и керосин), возвращенный шофером его товарищу по работе, был того же сорта, что и взятый взаймы.

Плотность бензина и керосина можно вычислить с помощью обычного деления, не выписывая никаких уравнений, но доктору Шарадеку известно гораздо больше. Он утверждает, что:

1) шоферы не умеют отличать керосин от бензина;

2) тяжелая смесь, получившаяся в ведре, не пригодна для двигателей современных автомобилей;

3) он, доктор Сильвестр Шарадек, может так решить задачу, что получится легкая смесь, которой не стыдно заправить и авиационный мотор.

Каким образом ему это удастся?

**80. Волшебная книга.** У доктора Сильвестра Шарадека имеется библиотека, составленная главным образом из книг по черной и белой магии. Одной из них доктор Шарадек особенно дорожит и лишь однажды показал ее своему ученику.

— Открой книгу на любом месте и скажи, какое число там написано! — повелел доктор, и послушный ученик назвал число 4783.

— А теперь перелистай столько страниц, сколько тебе угодно, и скажи, какое число написано там, где ты остановишься!

Выполнив и это повеление, ученик назвал число 1955.

— Выбери теперь два любых четырехзначных числа! — продолжал Шарадек.

Ученик выбрал 2079 и 7081.

— Читай вслух по порядку все числа от первого выбранного тобой места в книге (то есть от числа 4783) до второго (то есть до числа 1955), но при этом те, которые заключены между 2079 и 7081.

Послушный ученик выполнил и это нелегкое задание. Ему пришлось прочитать около 2000 чисел и около 1000 из них вычеркнуть.

Затем доктор Шарадек велел ученику проверить, чему равна разность между последовательными невычеркнутыми числами. Оказалось, что разность принимает лишь три различных значения!!!

Не могли бы вы объяснить, хотя бы на небольшой модели (в книге доктора Шарадека было 10 000 чисел), в чем секрет волшебной книги?

**81. Гири.** У доктора Шарадека есть два школьных друга, один из которых недавно открыл лавку, а другой — небольшой магазин. Владелец лавочки ведет розничную торговлю бакалейными (сыпучими) товарами: кофе, крупой, мукой и т. д., а владелец магазина — в основном поштучно продает огурцы, лимоны, сельдь и т. д., назначая цену за них в зависимости от веса.

У доктора Шарадека хранились два набора гирь. В одном наборе были гири 10, 30, 90 и 270 г, в другом — гири 10, 20, 40, 80 и 160 г. Пригласив к себе своих школьных друзей, доктор Шарадек пообещал подарить им оба набора гирь при условии, если каждый из друзей выберет именно тот набор, который для него наиболее удобен.

Какой набор выбрал владелец лавочки и какой — владелец магазина?

**82. Удивительная компания.** Некто утверждал, будто ему довелось провести вечер в компании из 12 человек (включая его самого), подобравшейся так, что:



а) каждый из присутствовавших не был знаком с шестью членами общества, но знал остальных;

б) каждый входил в тройку людей, знакомых между собой;

в) среди присутствовавших нельзя было найти четырех человек, которые все были бы знакомы друг с другом;

г) среди присутствовавших нельзя было найти четверых, которые бы все не были знакомы друг с другом;

д) каждый из присутствовавших входил в тройку людей, не знакомых друг с другом;

е) у каждого из присутствовавших среди незнакомых ему лиц нашлось такое, с которым у него в этой компании не было общих знакомых.

Услышав об этом, доктор Шарадек заявил, что ему довелось быть в компании, удовлетворявшей условиям а), б), г) и д), где каждый знал шестерых и только шестерых из присутствовавших и имел знакомого, вместе с которым они знали всю компанию (то есть такого знакомого, который мог бы познакомить его со всеми ранее не знакомыми ему лицами).

Верны ли утверждения доктора Шарадека и его анонимного предшественника? Можно ли привести пример компании из 10 человек, удовлетворяющей условиям б), в), г) и д), в которой каждый знал бы пятерых и только пятерых из присутствующих и имел знакомого, знающего всех остальных членов компании? Можно ли указать пример компании из 10 человек, удовлетворяющей всем условиям, кроме условия а)?

**83. Чемпион по интеллекту.** Доктор Сильвестр Шарадек во всеуслышание заявил, что отгадает любое слово из словаря\*, если ему будет разрешено задать 20 вопросов.

Возможно ли это?

**84. Рассеянный учитель.** Один учитель, желая установить взаимосвязь между различными увлечениями школьников, занимался исследованиями наклонностей своих учеников. Как-то раз, придя на урок, он попросил

---

\* Доктор Шарадек пользовался «Словарем польского языка» С. Ланде, мы же возьмем «Толковый словарь русского языка» под редакцией Д. Н. Ушакова (М., Гос. изд-во иностранных и национальных словарей, 1947—1948). — *Прим. перев.*

встать всех, кто любит концерты и кто охотно играет в шахматы. Любители музыки должны были поднять левую руку, любители шахмат — правую. Оказалось, что 30% стоящих подняли обе руки. Аналогичный эксперимент с любителями игры в шахматы и любителями велосипедного спорта привел к тому, что обе руки подняли 35% вставших. В третьем эксперименте с любителями музыки и велосипедного спорта обе руки подняли 40% опрошенных. Уже выйдя из класса, учитель вспомнил, что забыл спросить, кто из учеников разделяет все три увлечения, и он даже не подсчитал, сколько учеников вставало каждый раз. Тем не менее доктор Шарадек заверил нашего психолога, что среди опрошенных им учеников ребята со столь разносторонними увлечениями заведомо имеются.

Были ли у доктора Шарадека основания утверждать это так уверенно?

**85. Три шахматиста.** В шахматном клубе имени доктора Шарадека часто встречаются три завсегдатая: Демьян ( $D$ ), Емельян ( $E$ ) и Феликс ( $F$ ). Они проводят там все вечера, за исключением субботы и воскресенья. По оценке доктора Шарадека класс игры этих трех шахматистов распределялся следующим образом. Демьян после «уикэнда» несколько утрачивал спортивную форму и с понедельника по среду включительно играл на 12 баллов, а в четверг и пятницу  $D$  играл уже в полную силу на 17 баллов. Емельян играл одинаково независимо от дня недели. Каждый вечер  $E$  играл по пять партий. Его спортивную форму в первых трех партиях доктор Шарадек оценивал в 16 баллов, но затем напряжение сыгранных партий и позднее время брали свое, и в остальных двух партиях уровень игры понижался до 11 баллов. Спортивная форма Феликса не была подвержена никаким колебаниям. Его игру доктор Шарадек неизменно оценивал 14 баллами.

Приведенные выше числа следует понимать в том смысле, что если шахматист, играющий на  $a$  баллов, встречается с шахматистом, играющим на  $b$  баллов, причем  $a > b$ , то первый шахматист всегда выигрывает.

Требуется найти среднее число побед  $D$  над  $E$ ,  $E$  над  $F$  и  $F$  над  $D$  и, кроме того, оценить «среднюю силу игры» каждого из завсегдатаев шахматного клуба —  $D$ ,  $E$  и  $F$ .

86. **Метр доктора Шарадека.** В магазинах, где продаются мануфактурные товары (полотно, оберточная бумага, веревки и т. д.), пользуются деревянным метром с сантиметровой шкалой. Как известно из книги «Сто задач», метр доктора Шарадека несколько отличается от метра, которым пользуются продавцы магазинов\*.

Для каких из перечисленных (а также неназванных) выше товаров метр Шарадека удобнее обычного, применяемого продавцами?

87. **Термометр доктора Шарадека.** У доктора Шарадека имеется термометр с двумя шкалами: Реомюра и Цельсия. Кто-то ехидно заметил, что не хватает лишь шкалы Фаренгейта.

— Отнюдь, — ответил Сильвестр Шарадек, — достаточно знать обычное сложение, чтобы, взглянув на мой термометр, вы узнали температуру по шкале Фаренгейта!

Как это сделать?

88. **Доктор Шарадек и большая политика.** Сильвестр Шарадек направил недавно в ООН пространное письмо с протестом против плана, обнаруженного им в документах секретариата.

План предусматривал раздел земного шара на 5 областей (Европа, Азия, Америка, Африка, Океания) и создание в каждой из них по одной станции международного контроля, в задачу которой должно было входить наблюдение за строгим соблюдением международного права в пределах области. Расстояния между станциями, по замыслу авторов плана, должны быть не менее 10 000 км.

Что вызвало гнев и возмущение нашего знаменитого дипломата?

---

\* См. в книге Г. Штейнгауза «Сто задач» задачу 94.

В отличие от обычного метр доктора Шарадека имеет в начале оковку длиной в  $\frac{1}{2}$  см. Это позволяет особенно просто измерять (с точностью до  $\frac{1}{2}$  см) длину отрезка. Если начало  $A$  отрезка  $AB$  совмещено с обрезом оковки и конец  $B$  оказался между штрихами сантиметровой шкалы, то длина отрезка  $AB$  в сантиметрах совпадает с числом, стоящим между теми штрихами, против которых оказался конец  $B$ . Если конец  $B$  совпал с меткой шкалы между числами  $N$  и  $N + 1$ , то длина отрезка  $AB$  равна  $N + \frac{1}{2}$  см. — Прим. перев.

89. Чаша и столицы. Доктор Шарадек, не прибегая к помощи атласов и глобусов, решил следующую задачу

Существует ли сферическая чаша, покрывающая  $\frac{1}{5}$  поверхности Земли и охватывающая ровно 20 столиц государств — членов ООН, в которой к тому моменту насчитывалось 101 государство?

90. «Патомат». Как известно, доктор Шарадек — знаменитый шахматист. В решающей партии матча на звание чемпиона мира по шахматам (в которой достойный маэстро играл белыми) его противник, известный венгерский шахматист Кедараш, сделав ход Kg5—f7, объявил шах и уже торжествовал было победу. Но... доктор Шарадек доказал, что позицию, в которой находятся белые, нельзя считать ни матом, ни патом, поскольку она сочетает в себе черты того и другого. Невиданное шахматное явление, по мнению Шарадека, правильнее было бы называть «патоматом». По решению судейской коллегии звание чемпиона мира по шахматам разделили оба участника матча.

Какая позиция сложилась на доске после хода черных Kg5 — f7?

91. Доктор Шарадек — бильярдист. У доктора Шарадека имеется круглый бильярд. В борту бильярда прорезано отверстие. Игрок ставит бильярдный шар на диаметр круга, проходящий через отверстие, и, прицелившись, бьет по нему кием так, чтобы, отразившись от борта, шар попал в отверстие. Шар может двигаться по трем траекториям: прямолинейной (отражение от точки, диаметрально противоположной той, в которой прорезано отверстие, когда шар движется по диаметру круга) и двум ломаным, симметричным относительно диаметра, проходящего через отверстие.

Доктор Шарадек мимоходом сообщил мне, что он всегда выбирает начальную точку так, чтобы длины всех трех возможных траекторий бильярдного шара были одинаковыми. Длина прямолинейной траектории действительно мало отличается от длины ломаных траекторий. Например, если за единицу длины принять радиус бильярдного стола, то для шара, отстоявшего в начальный момент на расстояние 1,5 от отверстия, длина

прямолинейной траектории составляет 2,5, а длина ломаной — около 2,6.

Можно ли выбрать начальное положение бильярдного шара так, чтобы между длинами прямолинейной и ломаных траекторий достигалось точное равенство?

**92. Квадратура круга.** Такое название дал сам доктор Сильвестр Шарадек следующей задаче из области картографии.

Представим себе остров, береговая линия которого имеет форму идеальной окружности. Как начертить квадратную карту такого острова?

Великий маэстро любезно пояснил, что отображение острова на карту должно быть таким, чтобы береговая линия переходила в контур квадрата и масштаб точно сохранялся, то есть все части острова, имеющие одинаковую площадь, должны переходить в равновеликие области на карте.

## СПОРТИВНЫЕ ЗАДАЧИ

**93. Три бегуна.** Три бегуна  $A$ ,  $B$  и  $C$  систематически соревновались в беге на 200 м и после каждого забега записывали, кто из них пересек линию финиша первым, кто — вторым и кто — третьим. По окончании спортивного сезона выяснилось, что в большинстве товарищеских соревнований  $A$  опередил  $B$ , бегун  $B$  — также в большинстве случаев — оказался более быстроногим, чем  $C$ , а  $C$  — также в большинстве случаев — добился лучших результатов, чем  $A$ .

Каким образом это получилось?

**94. Спортивные соревнования.** Так называемая олимпийская система определения чемпиона (принятая, например, в теннисных турнирах) состоит в следующем. Все участники соревнований тянут жребий и разбиваются на пары (для простоты мы будем предполагать, что число участников равно 8). Победители в каждой паре становятся участниками (их уже только 4) встреч второго круга. Два победителя встреч второго круга переходят в третий круг. После розыгрыша финала определяется победитель — чемпион соревнований. Он получает первый, а его соперник — второй приз.

Предположим, что каждый участник соревнований обладает вполне определенной силой так же, как каждый предмет обладает вполне определенным весом, и что более сильный спортсмен всегда побеждает слабого (подобно тому как чаша весов с более тяжелым предметом всегда перетягивает чашу весов с более легким предметом). При этом условии олимпийская система определения чемпиона справедлива, поскольку первое место достается сильнейшему участнику соревнований. Однако олимпийскую систему нельзя считать справедливой по отношению к спортсмену, занявшему второе место: оно всегда остается за участником соревнований, вышедшим в финал, но потерпевшим поражение от чемпиона.

Какова вероятность того, что второе место займет второй по силе участник соревнований?

**95. Еще раз о спортивных соревнованиях.** Когда из соревнований, проводившихся по олимпийской системе (см. предыдущую задачу), выбыли все участники, кроме пяти, к оставшимся участникам добавили... трех фиктивных участников («мертвые души») и общее число участников снова составило 8. Предположим, что после жеребьевки все «мертвые души» оказались в конце списка участников (то есть «вытянули» номера 6, 7 и 8).

Какова вероятность того, что среди участников соревнований второе место по праву займет второй по силе спортсмен?

**96. Мотоциклетные гонки.** Один из многочисленных энтузиастов гонок по гаревой дорожке был вынужден пропустить интереснейшее состязание и узнал от своих знакомых, что гонщиков было столько же, сколько заездов, что каждый гонщик мог померяться силами с любым другим гонщиком лишь в одном заезде и что в каждом заезде, как обычно, стартовали четыре гонщика.

Полна ли информация, полученная любителем мотоциклетных гонок по гаревой дорожке?

**97. Заминированная шахматная доска.** Некоторые поля шахматной доски заминированы так, что при любом выборе начальной позиции король не может пройти от левого края доски до правого. Доказать, что в этом

случае от верхнего края доски до нижнего по одним лишь заминированным полям можно пройти ходом ладьи.

Доказать также обратное утверждение.

**98. Ладьи на шахматной доске\*.** Возьмем шахматную доску с одинаковым числом горизонталей и вертикалей, которая от обычной шахматной доски будет отличаться тем, что распределение черных и белых полей на ней может быть произвольным, лишь бы в каждой вертикали было по крайней мере одно белое поле и по крайней мере одна вертикаль состояла целиком из белых полей. Мы говорим, что нам удалось расставить ладьи на шахматной доске (а у нас имеется достаточный запас ладей, так что недостатка в них возникнуть не может), если выполняются следующие условия:

1) ладьи стоят только на белых полях;

2) на шахматной доске стоит по крайней мере одна ладья;

3) ладьи не атакуют друг друга (то есть расставлены так, что одна ладья не может бить другую);

4) каждое белое поле, не занятое ладьей, но атакуемое ею по горизонтали, находится также под угрозой некоторой ладьи по вертикали.

Доказать, что ладьи всегда можно расставить, не нарушив при этом правила 1—4.

**99. Трехмерная шахматная доска.** На шестнадцатиклеточной шахматной доске можно расставить 4 фигуры так, чтобы на любой горизонтали, любой вертикали и на любой из больших диагоналей стояла ровно одна фигура.

Возьмем теперь куб, сложенный из 64 маленьких кубиков. В таком кубе можно выделить 12 слоев (12 шестнадцатиклеточных шахматных досок, сложенных из маленьких кубиков).

Доказать, что в клетках-кубиках большого куба можно расставить 16 фигур так, чтобы в каждом слое на любой горизонтали и на любой вертикали стояла ровно одна фигура.

---

\* См. также задачу № 81 в книге Г. Штейнгауза «Сто задач». Приведенное там решение неполно: в нем рассмотрены лишь два частных случая. — *Прим. перев.*



100. Еще раз о трехмерной шахматной доске. Куб, разбитый на меньшие кубы, можно рассматривать как трехмерную шахматную доску. Обычная шахматная доска содержит  $8^2 = 64$  квадратных поля. Трехмерная шахматная доска состоит из  $8^3 = 512$  кубиков. Построить ее можно, взяв куски проволоки длиной в 8 единиц и расположив их так, чтобы одни куски были параллельны оси  $z$  и проходили на плоскости  $yz$  через точки с координатами  $x = p, y = q$  ( $p$  и  $q$  — целые числа), другие — параллельны оси  $y$  и проходили на плоскости  $xz$  через точки  $x = p, z = q$ , третьи — параллельны оси  $x$  и проходили на плоскости  $yz$  через точки  $y = p, z = q$ . Целые числа  $p, q$  во всех трех случаях принимают значения  $0, 1, 2, \dots, 8$ .

Требуется расставить 64 ладьи на 64 из 512 «клеток» трехмерной шахматной доски так, чтобы ни одна ладья не угрожала другой. Ладья на трехмерной доске, помимо обычных — горизонтальных — ходов, может ходить на любое расстояние по вертикали. Ладьи следует расставить так, что на какую бы из свободных клеток мы ни поставили шестьдесят пятую ладью, она непременно должна оказаться под ударом одной из 64 ладей.

## Приложение

### ЗАДАЧИ ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

**А. Два треугольника.** Имеются два треугольника. Каждая сторона первого треугольника больше любой из сторон второго треугольника. Следует ли отсюда, что площадь первого треугольника больше площади второго?

**Б. Дальномер.** Прямоугольный кусок картона поднимем перед собой на уровень глаз. Плоскость картона должна быть вертикальной, а верхний край листа должен располагаться параллельно прямой, проходящей через зрачки, на уровне зрачков. Зажмурив левый глаз, мы увидим, как правый край листа картона совместится с деревом, о котором известно, что расстояние до него меньше 4 м. Зажмурив правый глаз и открыв левый, мы увидим, как дерево переместится по отношению к листу картона влево до некоторой точки, которую мы обозначим крестиком и напомним под ней цифру 4.

Построить геометрическую теорию описанного прибора для измерения расстояний на местности.

**В. Устный счет.** Считаем вслух: один, два, три, ..., десять, одиннадцать, двенадцать, ..., двадцать, тридцать, ..., девяносто, сто, двести, ..., девятьсот, тысяча, две тысячи, ..., десять тысяч, двадцать тысяч и т. д.

Сколько чисел мы успеем назвать при таком способе счета, пока дойдем до миллиона? А до миллиарда?

**Г. Экономичная кастрюля.** Пользуясь методами дифференциального исчисления или более элементарно можно показать, что расход жести на изготовление цилиндрической консервной банки минимален, если высота банки равна ее ширине, то есть диаметру основания. Опираясь на этот результат и не прибегая более к дифференциальному исчислению (и даже не производя вообще никаких выкладок), доказать, что расход материала на изготовление цилиндрической кастрюли (без крышки) минимален, если высота кастрюли равна половине ее ширины, то есть радиусу дна.

**Д. Скакуны.** Как известно, доктор Шарадек великолепно разбирается в лошадях. Недавно он поразил своих приятелей рассказом об иноходцах, копыта которых при беге касаются земли в иной, чем у рысаков, последовательности. Доктор Шарадек заявил также, что знает, сколько существует различных типов лошадей (различных в том смысле, что они отличаются один от другого последовательностью касания земли копытами).

Чему равно максимальное число типов лошадей по классификации доктора Шарадека?

**Е. Четырехугольник.** Точки  $A, B, C, D$  — вершины параллелограмма. Точка  $P$  не лежит ни на одной из прямых, определяемых сторонами параллелограмма.

Доказать, что существует четырехугольник с вершинами в точках  $P, Q, R$  и  $S$ , такой, что середины его сторон  $PQ, QR, RS$  и  $SQ$  совпадают с точками  $A, B, C$  и  $D$ .

1. Предположим, что окружность с центром в точке  $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$  и радиусом  $r$  проходит по крайней мере через два узла решетки  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$ , где  $x_1, x_2, y_1, y_2$  — натуральные числа или нули и либо  $x_1 \neq x_2$ , либо  $y_1 \neq y_2$ . Тогда расстояние от каждой из этих точек до центра окружности равно ее радиусу  $r$ :

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(x_1 - \sqrt{2})^2 + (y_1 - \sqrt{3})^2}, \\ r &= \sqrt{(x_2 - \sqrt{2})^2 + (y_2 - \sqrt{3})^2}. \end{aligned}$$

Возведя правые части этих равенств в квадрат и приравняв их одну другой, получим

$$(x_1 - \sqrt{2})^2 + (y_1 - \sqrt{3})^2 = (x_2 - \sqrt{2})^2 + (y_2 - \sqrt{3})^2.$$

Из последнего равенства после несложных преобразований найдем

$$2(x_2 - x_1)\sqrt{2} + 2(y_2 - y_1)\sqrt{3} = x_2^2 - x_1^2 + y_2^2 - y_1^2.$$

Итак, в силу сделанного предположения должно выполняться равенство

$$a\sqrt{2} + b\sqrt{3} = c,$$

где  $a, b, c$  — целые числа (в том числе и нули). Но число  $a\sqrt{2} + b\sqrt{3}$  при всех целых отличных от нуля значениях  $a$  и  $b$  иррационально, в правой же части равенства стоит число  $c$ , равное либо нулю, либо отличному от нуля целому числу. Следовательно, это равенство может выполняться лишь в том случае, если  $a = b = c = 0$ , то есть если вопреки сделанному предположению  $x_1 = x_2$  и  $y_1 = y_2$ . Таким образом, предположение о том, что окружность с центром в точке  $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$  и радиусом  $r$  проходит по крайней мере через

два узла целочисленной решетки, приводит к противоречию. Отсюда мы заключаем, что в зависимости от радиуса такая окружность проходит либо через один узел решетки, либо не проходит ни через один из узлов решетки.

2. Эта задача решается особенно легко, если воспользоваться решением предыдущей задачи. Действительно, рассмотрим окружность с центром в точке  $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$  и переменным радиусом  $r$ . Если радиус  $r$  выбран достаточно малым, то внутри окружности, очевидно, не лежит ни один узел решетки. Перенумеруем теперь все узлы решетки следующим образом. Пусть  $P_1$  означает ближайший к точке  $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$  узел решетки;  $P_2$  — узел решетки, ближайший к точке  $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$  среди всех узлов, кроме  $P_1$ ; вообще  $P_n$  — узел решетки, ближайший к точке  $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$  среди всех узлов решетки, кроме  $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$ . Пусть  $r_k$  — расстояние от узла  $P_k$  до точки  $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ . Выбирая ближайший к точке  $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$  узел среди оставшихся после выбрасывания очередного узла, мы последовательно перенумеруем все точки плоскости, причем их расстояния  $r_1, r_2, \dots$  от центра окружности  $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$  будут образовывать монотонно возрастающую последовательность:

$$r_1 < r_2 < r_3 < \dots < r_n < r_{n+1} < \dots$$

Действительно, если бы при каком-то  $n$  выполнялось равенство  $r_n = r_{n+1}$ , то это означало бы, что существуют два различных узла решетки, находящиеся на одинаковых расстояниях от точки  $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ . Однако, как следует из решения предыдущей задачи, это невозможно.

Выберем теперь последовательность чисел  $R_0, R_1, R_2, \dots$  так, чтобы выполнялись неравенства

$$R_0 < r_1 < R_1 < r_2 < R_2 < r_3 < \dots$$

Тогда окружность с центром в точке  $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$  и радиусом  $R_i$  будет содержать ровно  $i$  узлов решетки, а именно узлы  $P_1, P_2, P_3, \dots$

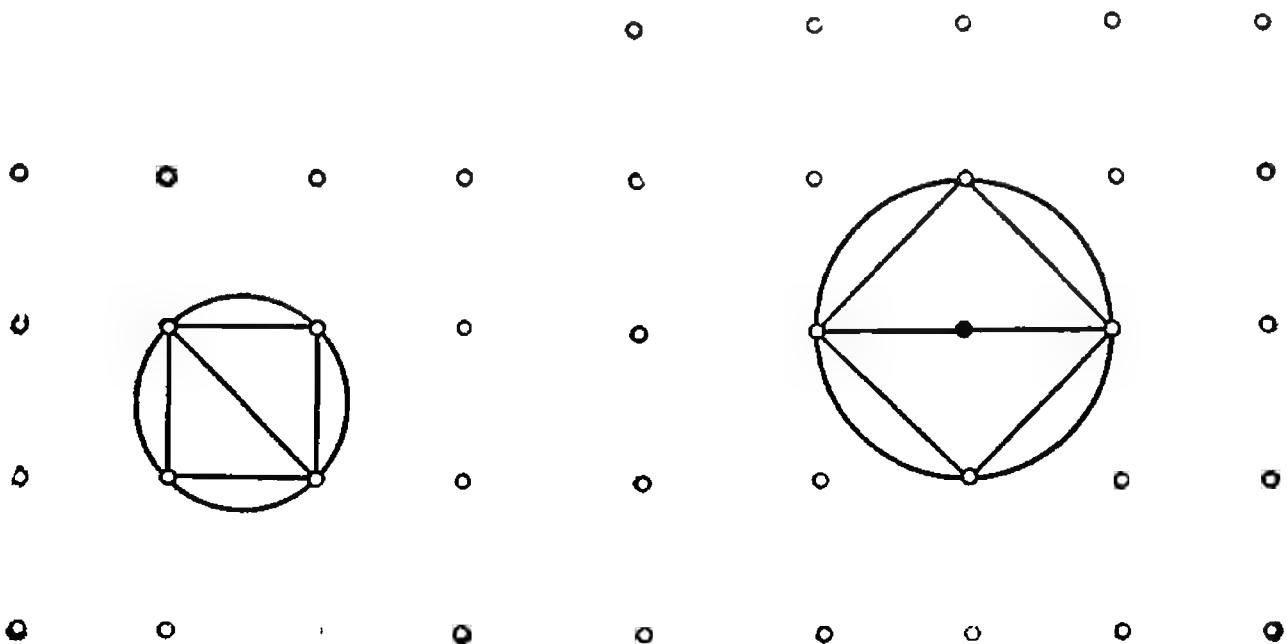


Рис. 2.

Рис. 3.

...,  $P_1$ . Окружность радиуса  $R_0$  не содержит внутри себя ни одного узла решетки.

Аналогично можно показать, что на поверхности сферы с центром в точке  $(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$  всегда лежит не более одного узла пространственной решетки. Следовательно, в трехмерном пространстве существует сфера, внутри которой находятся ровно  $n$  узлов решетки.

3. В некоторых случаях мы будем довольствоваться достаточно подробным рисунком, поскольку доказательства в случае необходимости восстанавливаются без труда.

а) На рис. 2 показана наибольшая окружность, внутри которой не содержится ни одного узла решетки. Диаметр ее равен  $\sqrt{2}$ .

б) Наибольшая окружность, внутри которой содержится ровно один узел решетки, показана на рис. 3. Ее диаметр равен 2.

в) На рис. 4 изображена наибольшая окружность, внутри которой содержатся два узла решетки. Ее диаметр равен  $\sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ .

г) На рис. 5 показана наибольшая окружность, внутри которой содержатся 3 узла решетки. Вычислим ее диаметр. Эта окружность описана вокруг треугольника  $ABC$  со сторонами  $AB = AC = \sqrt{5}$  и  $BC = \sqrt{2}$ . Высота  $h$  и площадь  $S$  треугольника  $ABC$  равны соответственно

$$h = \sqrt{(\sqrt{5})^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{3}{\sqrt{2}}, \quad S = \frac{1}{2} h \cdot BC = \frac{3}{2}.$$

Из выражения для радиуса  $R$  описанной окружности получаем

$$2R = \frac{AB \cdot BC \cdot CA}{2S} = \frac{5\sqrt{2}}{3}.$$

Следовательно, искомый диаметр равен  $5\sqrt{2}/3$ .

д) Окружность диаметром  $\sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$ , изображенная на рис. 6, — наибольшая из окружностей, содержащих внутри себя 4 узла решетки.

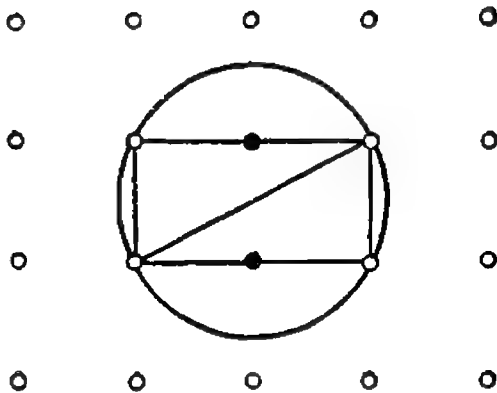


Рис. 4.

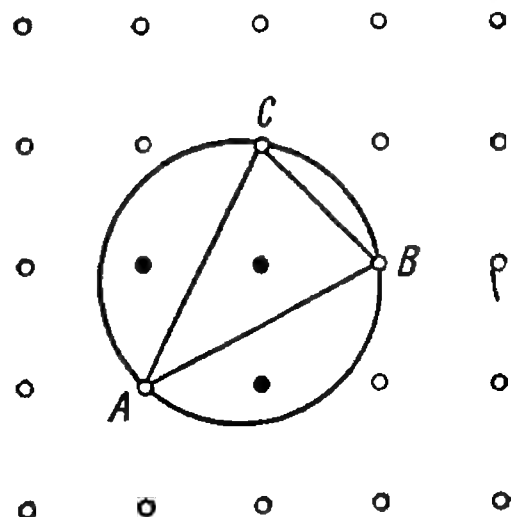


Рис. 5.

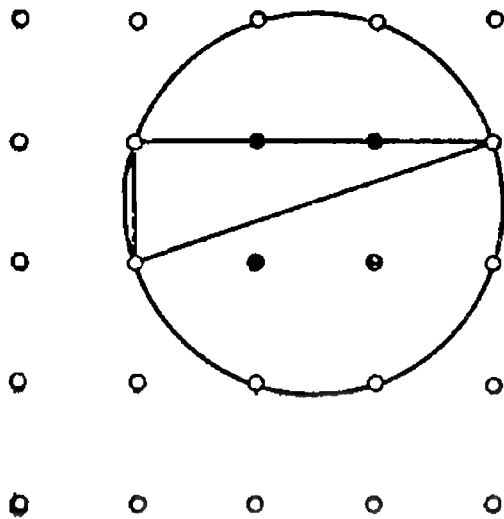


Рис. 6.

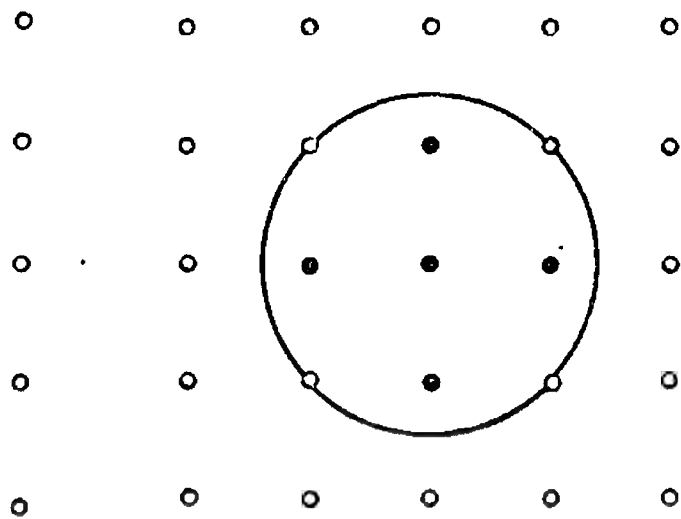


Рис. 7.

е) Этот случай не только наиболее интересен, но и наиболее труден. На рис. 7 изображена окружность диаметром  $2\sqrt{2}$ , содержащая внутри себя пять узлов решетки. Однако это не наибольшая (как могло бы показаться) из окружностей, содержащих внутри себя пять узлов решетки. Вернемся к рис. 6. Изображенная на нем окружность охватывает лишь четыре узла. Немного сдвинув ее, можно добиться того, что внутрь окружности попадут сразу по крайней мере три новых узла. Отсюда ясно, что диаметр окружности, содержащей внутри себя пять узлов решетки, должен быть меньше  $\sqrt{10}$  и, следовательно, меньше диаметра окружности, внутри которой содержатся четыре узла решетки. Покажем (и это наиболее интересно), что окружности, содержащей внутри себя ровно пять узлов решетки, вообще не существует.

Рассмотрим узлы решетки, изображенные на рис. 8. Попытаемся найти окружность, содержащую внутри себя точки  $P_1, P_2, P_3, P_4$  и

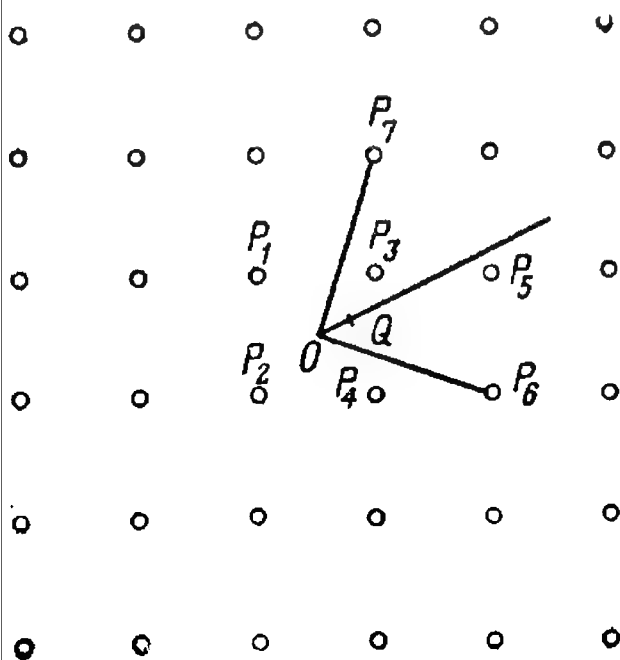


Рис. 8.

пятую точку  $P_5$ . Центр наибольшей окружности, содержащей точки  $P_1, P_2, P_3, P_4$ , находится в точке  $O$ , а ее радиус равен  $OP_6$ . Проведем биссектрису угла  $P_6OP_7$ . На биссектрисе выберем точку  $Q$ , лежащую на достаточно близком расстоянии от точки  $O$ , и проведем окружность с центром в точке  $Q$  и радиусом, равным отрезку  $OP_7$ . Нетрудно проверить, что точка  $P_5$  попадает внутрь этой окружности, поскольку  $QP_5 < QP_7 = OP_7$ . Столь же легко убедиться в том, что при перемещении центра окружности радиуса  $OP_6$  из точки  $O$  в точку  $Q$  ни один другой узел решетки не попадает внутрь окружности

и ни один из ранее лежавших внутри окружности узлов не оказывается вне окружности. Следовательно, выбирая точку  $Q$  достаточно близко к точке  $O$ , можно получить окружность радиуса, мало отличающегося от  $OP_5 = \sqrt{10}$ , внутри которой содержатся пять узлов решетки. Но окружность радиуса  $\sqrt{10}$  может содержать внутри себя либо четыре узла решетки, либо сразу семь узлов. Ни пяти, ни шести узлов внутри такой окружности содержаться не может. Наибольшая окружность, внутри которой содержатся шесть узлов решетки, имеет диаметр 3 (то есть меньше  $\sqrt{10}$ ). Диаметр, превосходящий  $\sqrt{10}$ , имеет лишь наибольшая окружность, внутри которой заключены семь узлов решетки.

4. Диаметры окружностей  $d_1, d_2, d_3, d_4$ , внутри которых содержатся узлы решетки, удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} 0 < d_1 &\leq 2, & 1 < d_2 &\leq \sqrt{5}, \\ 2 < d_3 &\leq \frac{5\sqrt{2}}{3}, & 2 < d_4 &\leq \sqrt{10}. \end{aligned}$$

Следовательно, диаметр  $d$  окружности, внутри которой в зависимости от ее положения могут находиться 1, 2, 3 или 4 точки решетки, должен одновременно удовлетворять всем четырем неравенствам, или, что то же, неравенству

$$\sqrt{2} < d \leq 2.$$

Окружность с диаметром, удовлетворяющим этому неравенству, нельзя передвинуть так, чтобы внутри нее оказалось 6 узлов решетки, поскольку, как видно из рис. 9, диаметр таких окружностей должен быть больше 2. Тем более невозможно передвинуть окружность диаметром  $d \leq 2$  так, чтобы внутри нее оказалось менее 5 узлов решетки. Следовательно, внутри окружности диаметром  $d$ , удовлетворяющим неравенству  $\sqrt{2} < d \leq 2$ , могут находиться лишь 1, 2, 3 или 4 узла. Таким образом, ответ на первый вопрос задачи получен.

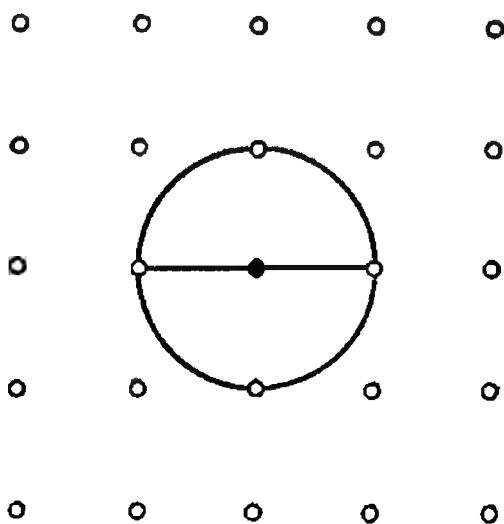


Рис. 9.

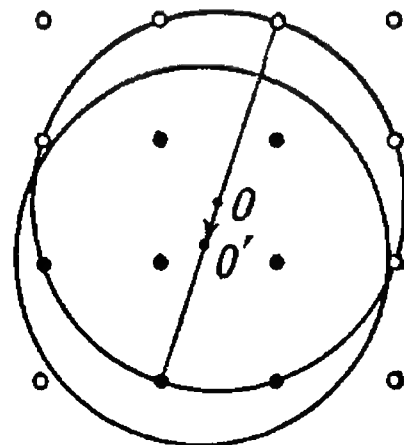


Рис. 10.



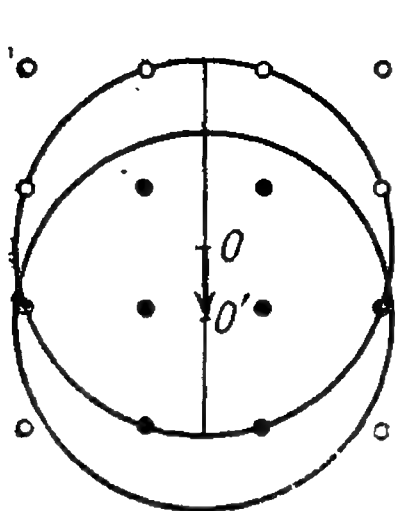


Рис. 11.

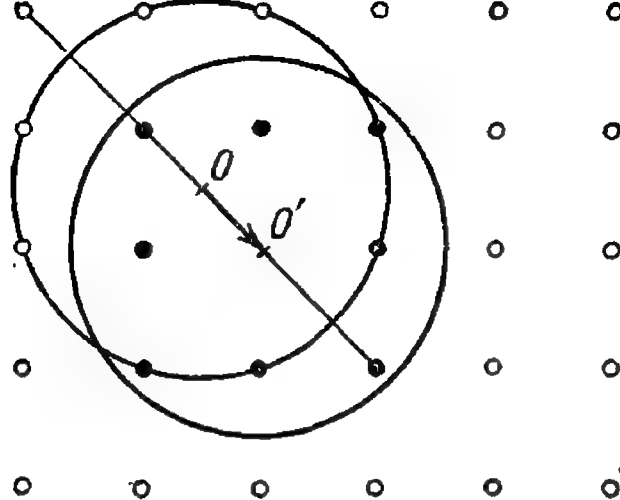


Рис 12.

Для решения второй части задачи воспользуемся предыдущей задачей. Мы уже знаем, что наибольшая окружность, внутри которой содержатся 4 узла решетки, имеет диаметр, равный  $\sqrt{10}$ , а окружность, внутри которой содержатся 5 узлов решетки, должна иметь диаметр меньше  $\sqrt{10}$ . Следовательно, окружность диаметром  $\sqrt{10}$  нельзя сдвинуть в такое положение, в котором внутри нее содержалось бы 5 узлов решетки.

Аналогично можно показать, что внутри окружности диаметром  $\sqrt{10}$  не могут находиться 6 узлов решетки. Однако такую окружность можно сдвинуть так, чтобы внутри нее оказалось 7 (рис. 10), 8 (рис. 11) или 9 (рис. 12) узлов решетки.

Рассматривая различные группы из 10 узлов решетки, нетрудно убедиться, что диаметр окружности, охватывающей 10 узлов, должен быть больше  $\sqrt{10}$ . Следовательно, внутри окружности диаметром  $\sqrt{10}$  не могут находиться 10 узлов решетки.

5. Условие  $a^2 + d^2 = b^2 + c^2$  означает, что пары чисел  $a, d$  и  $b, c$  могут быть длинами катетов двух прямоугольных треугольников с общей гипотенузой.

Возводя обе части равенства  $a + d = b + c$  в квадрат и используя предыдущее условие, получаем, что  $ad = bc$  или что наши прямоугольные треугольники имеют одинаковую площадь. Следовательно, высоты, опущенные из вершин прямых углов на гипотенузу (рис. 13), равны. Кроме того, рассматриваемые прямоугольные треугольники подобны, так как

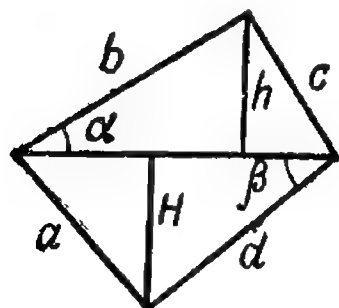


Рис. 13.

$$h \operatorname{ctg} \alpha + h \operatorname{ctg} (90^\circ - \alpha) = \\ = H \operatorname{ctg} \beta + H \operatorname{ctg} (90^\circ - \beta),$$

но поскольку  $h = H$ , то

$$\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{ctg} \beta + \operatorname{tg} \beta,$$

или, наконец,  $\sin 2\alpha = \sin 2\beta$ . Таким образом,  $\alpha = \beta$  при  $0 < \alpha < 90^\circ$ . Следовательно, катеты треугольников попарно равны, что противоречит условию  $0 < a < b \leq c \leq d$ .

6. Докажем прежде всего, что если бы ответ на поставленный вопрос был положительным, то есть если бы разбиение отрезка  $[0, 1]$ , о котором говорится в условиях задачи, было возможно, то функция  $f(x)$  должна была бы на отрезке  $[0, 1]$  удовлетворять неравенству  $f(x) \neq x$ .

Действительно, предположим, что при некотором  $x_0$  из  $[0, 1]$  справедливо равенство  $f(x_0) = x_0$ . По условиям задачи, если  $x_0 \in A$ , то  $f(x_0) \in B$ . Но это бы означало, что  $x_0$  одновременно принадлежит пересекающимся множествам  $A$  и  $B$ . Полученное противоречие доказывает, что  $f(x) \neq x$  при всех  $x \in [0, 1]$ .

Из условий задачи следует, что  $0 \leq f(x) \leq 1$  и, в частности,  $0 \leq f(0) \leq 1$  и  $0 \leq f(1) \leq 1$ . Однако поскольку  $f(0) \neq 0$  и  $f(1) \neq 1$ , то  $0 < f(0) \leq 1$  и  $0 \leq f(1) < 1$ .

Введем новую функцию  $\varphi(x)$ , положив

$$\varphi(x) = f(x) - x.$$

Нетрудно видеть, что

$$\varphi(0) = f(0) > 0$$

и

$$\varphi(1) = f(1) - 1 < 0.$$

Функция  $\varphi(x)$  — как сумма двух непрерывных на отрезке  $[0, 1]$  функций — непрерывна на отрезке  $[0, 1]$ . Поскольку на концах отрезка она принимает значения различных знаков, то (в силу известного из анализа свойства непрерывных функций) в некоторой точке отрезка  $[0, 1]$  она должна обращаться в нуль. Обозначим эту точку  $\xi$  ( $0 < \xi < 1$ ). Тогда  $\varphi(\xi) = 0$ , то есть  $f(\xi) - \xi = 0$ , откуда  $f(\xi) = \xi$ , что, как мы видели ранее, невозможно.

7. Обозначив число  $\sqrt{5 + \sqrt{3 + \sqrt{5 + \sqrt{3 + \dots}}}}$  через  $x$ , получим уравнение  $x = \sqrt{5 + \sqrt{3 + \sqrt{x}}}$ , из которого значение  $x$  можно найти методом последовательных приближений. При  $x = 2$  правая часть уравнения равна 2,69, а при  $x = 3$  — равна 2,73. Следовательно, истинное значение  $x$  заключено между 2,69 и 2,73. Следующий шаг приводит к приближенному значению  $x \approx 2,718$ . Таким образом, число  $x$  меньше 3.

Возможен и другой подход к решению задачи. Уравнение  $x = \sqrt{5 + \sqrt{3 + \sqrt{x}}}$  после элементарных преобразований приводится к виду  $x^4 - 10x^2 - x + 22 = 0$ . Искомое число совпадает с одним из корней этого уравнения. Нетрудно увидеть, что  $x = -2$  удовлетворяет уравнению. Разделив левую часть на  $x + 2$ , получим кубическое уравнение  $x^3 - 2x^2 - 6x + 11 = 0$ . Приближенные значения его корней (с точностью до  $10^{-6}$ ) равны  $x_1 = 2,718709$ ,  $x_2 = 1,683969$  и  $x_3 = 2,402678$ . Все три корня меньше 3. Число, о котором говорится в условии задачи, совпадает с первым корнем  $x_1 = 2,718709$ . Итак,  $\sqrt{5 + \sqrt{3 + \sqrt{5 + \sqrt{3 + \dots}}}} < 3$ .

Интересно, что рассмотренное нами число  $x$  служит хорошим приближением числа  $e$  поскольку  $e \approx 2,718281$  с точностью до  $10^{-6}$ , то  $x - e < 0,0005$ .

Последнее замечание позволяет сделать некоторые геометрические выводы из приведенных ранее рассуждений. Как известно, число  $e$  трансцендентное (то есть оно не является корнем ни одного алгебраического уравнения с рациональными коэффициентами) и его нельзя построить с помощью циркуля и линейки, если задан единичный отрезок. Приближенное же равенство

$$e \approx \sqrt{5 + \sqrt{3 + \sqrt{5 + \sqrt{3 + \dots}}}}$$

позволяет приближенно строить  $e$ . Действительно, нетрудно проверить, что

$$\sqrt{5 + \sqrt{3 + \sqrt{5 + \sqrt{3 + \sqrt{5 + \sqrt{3 + \sqrt{5 + \sqrt{3}}}}}}}} = 2,718.$$

Число, стоящее в левой части равенства, можно получить из 1 с помощью конечного числа сложений и извлечения квадратного корня. Следовательно, это число допускает построение с помощью циркуля и линейки. Вот как это делается.

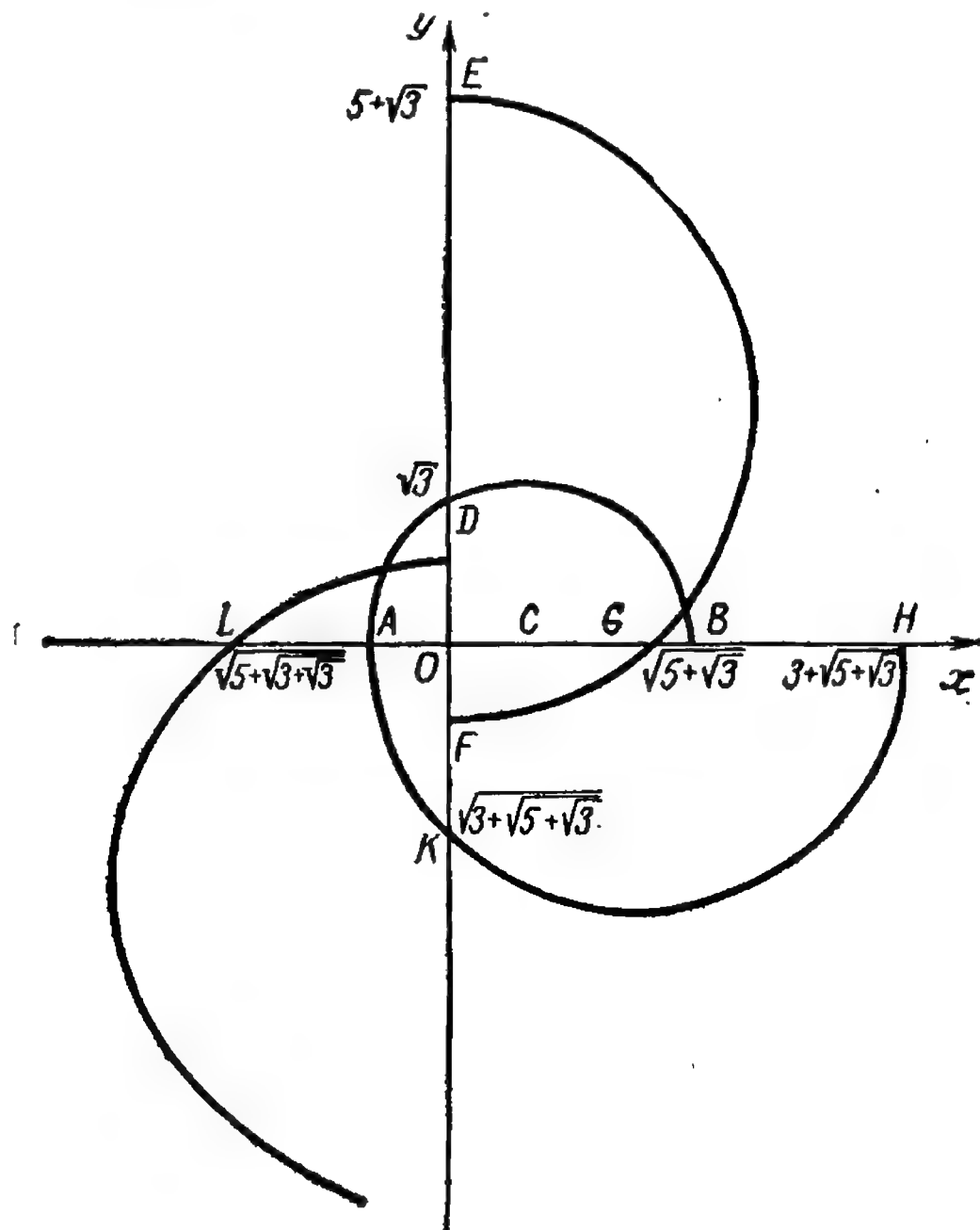


Рис. 14.

Построим прямые, пересекающиеся под прямым углом в точке  $O$  (рис. 14). На прямой  $Ox$  отложим отрезок  $OA = 1$  и отрезок  $OB = 3$  и, описав на  $AB$  как на диаметре полуокружность, получим на прямой  $Oy$  отрезок  $OD = \sqrt{3}$ . Отложив далее на прямой  $Oy$  отрезки  $DE = 5$  и  $OF = 1$ , опишем на  $EF$  как на диаметре полуокружность. Поскольку  $ED = 5 + \sqrt{3}$  и  $OF = 1$ , то  $OG = \sqrt{5 + \sqrt{3}}$ , где  $G$  — точка пересечения прямой  $Ox$  со второй полуокружностью. Отложив на прямой  $Ox$  отрезки  $BH = 3$  и  $OA = 1$ , с помощью полуокружности, описанной на  $AH$  как на диаметре, построим отрезок  $OK = \sqrt{3 + \sqrt{5 + \sqrt{3}}}$ , затем аналогичным способом отрезок  $OL = \sqrt{5 + \sqrt{3 + \sqrt{5 + \sqrt{3}}}}$  и т. д. После восьмикратного повторения описанной нами конструкции получим отрезок  $x \approx 2,718$ .

8. Эта интересная, хотя и не сложная, задача возникла в теории аппроксимации иррациональных чисел рациональными.

Не ограничивая общности, можно считать, что  $p$  и  $q$  — натуральные числа. Действительно, если бы  $p$  и  $q$  имели различные знаки, то для них выполнялось бы неравенство

$$\sqrt{2} - \frac{p}{q} > \sqrt{2}$$

и тем более — неравенство

$$\left| \sqrt{2} - \frac{p}{q} \right| > \frac{1}{3q^2}.$$

Если же оба числа были бы отрицательными, то, положив  $p_1 = -p$ ,  $q_1 = -q$ , мы бы свели задачу к доказательству неравенства

$$\left| \sqrt{2} - \frac{p_1}{q_1} \right| > \frac{1}{3q_1^2},$$

где  $p_1$  и  $q_1$  — натуральные числа.

Рассмотрим сначала случай, когда  $p/q > \sqrt{2}$ . Предположим, что  $p/q < 1,55$ . (Поскольку  $\sqrt{2} < 1,45$ , дроби  $p/q > 1,55$  отличаются от  $\sqrt{2}$  более чем на  $1/10$ , в то время как дробь  $1/3q^2$ , начиная с  $q = 2$ , меньше  $1/10$ . Таким образом, для  $p/q > 1,55$  искомое неравенство заведомо выполняется.)

Итак, пусть  $p/q < 1,55$ . Имеем

$$\left( \frac{p}{q} \right)^2 - 2 = \frac{p^2 - 2q^2}{q^2}.$$

Поскольку число  $p^2 - 2q^2$  натуральное, то

$$\left( \frac{p}{q} \right)^2 - 2 \geq \frac{1}{q^2},$$

откуда

$$\left( \frac{p}{q} + \sqrt{2} \right) \left( \frac{p}{q} - \sqrt{2} \right) \geq \frac{1}{q^2}$$

и, следовательно,

$$\frac{p}{q} - \sqrt{2} \geq \frac{1}{q^2} \cdot \frac{1}{p/q + \sqrt{2}}.$$

Поскольку  $p/q < 1,55$ , то  $p/q + \sqrt{2} < 1,55 + 1,45 = 3$ . Следовательно,  $\frac{1}{p/q + \sqrt{2}} > \frac{1}{3}$ . Таким образом, если  $p/q > \sqrt{2}$ , то

$$\frac{p}{q} - \sqrt{2} > \frac{1}{3q^2},$$

что и требовалось доказать.

Если же  $0 < p/q < \sqrt{2}$ , то

$$2 - \left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{2q^2 - p^2}{q^2} \geq \frac{1}{q^2},$$

откуда

$$\sqrt{2} - \frac{p}{q} \geq \frac{1}{q^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2} + p/q} > \frac{1}{q^2} \frac{1}{2\sqrt{2}} > \frac{1}{3q^2}.$$

Таким образом, при  $0 < p/q < \sqrt{2}$  справедливо неравенство

$$\sqrt{2} - \frac{p}{q} > \frac{1}{3q^2}.$$

Поскольку при целых  $p$  и  $q$  равенство  $p/q = \sqrt{2}$  невозможно, искомое неравенство доказано для всех пар целых чисел  $p$  и  $q$ ,  $q \neq 0$ .

9. Доказательство того, что  $\xi$  не может принимать значений, заключенных в интервале  $[1/2, 2/3]$ , проведем от противного. Предположим, что  $\xi$  удовлетворяет неравенству  $1/2 \leq \xi \leq 2/3$ . Обозначим через  $\xi_1$  непрерывную дробь

$$\frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}.$$

Тогда  $\xi = \frac{1}{a_1 + \xi_1}$ , откуда

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{a_1 + \xi_1} \leq \frac{2}{3}$$

и

$$\frac{3}{2} \leq a_1 + \xi_1 \leq 2. \quad (*)$$

Поскольку, как нетрудно проверить,  $0 < \xi_1 < 1$ , то  $a_1 = 1$ . В перестановку  $\{a_n\}$  каждое натуральное число входит один и только один раз. Следовательно,  $a_2 \geq 2$ , но тогда величина  $\xi_1$  должна удовлетворять неравенству  $\xi_1 < 1/2$ . Это противоречит неравенству (\*), согласно которому та же величина  $\xi_1$  должна удовлетворять неравенству  $1/2 \leq \xi_1 \leq 1$ .

Полученное противоречие показывает, что исходное предположение о том, будто  $\xi \in [1/2, 2/3]$ , неверно. Таким образом,  $\xi \notin [1/2, 2/3]$ , что и требовалось доказать.

В действительности в открытом интервале  $(0, 1)$  существует бесконечно много интервалов (отличных от  $[1/2, 2/3]$  и один от другого), сплошь заполненных «недоступными» для  $\xi$  значениями. Приведем лишь несколько примеров:  $[7/10, 3/4]$ ,  $[5/7, 8/11]$ ,  $[9/11, 5/6]$  и т. д. Доказательство «недоступности» каждого из них не представляет трудности. «Недоступным» для  $\xi$  будет и каждый интервал вида  $\left[ \frac{2k+1}{2k+3}, \frac{k+1}{k+2} \right]$ , где  $k = 1, 2, 3, 4, \dots$ , (при  $k = 1$  мы получаем рассмотренный интервал  $[1/2, 2/3]$ ). Доказательство «недоступности» и в этом случае несложно и проводится аналогично первой части решения задачи.

10. Пусть  $\{a_n\}$  — последовательность положительных чисел, удовлетворяющая условиям задачи. Поскольку  $a_n - a_{n+1} = a_{n+2} > 0$ , то последовательность  $\{a_n\}$  убывающая, а поскольку ее члены положительны, то она ограничена.

Рассмотрим последовательность

$$\{b_n\} = \left\{ a_{n+1} + \frac{1 - \sqrt{5}}{2} a_n \right\}.$$

Докажем, что между ее членами существует соотношение

$$b_{n+1} = -\frac{1 + \sqrt{5}}{2} b_n.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} b_{n+1} + b_n \frac{1 + \sqrt{5}}{2} &= a_{n+2} + \frac{1 - \sqrt{5}}{2} a_{n+1} + \\ &+ \left( a_{n+1} + \frac{1 - \sqrt{5}}{2} a_n \right) \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = a_{n+2} + \frac{1 - \sqrt{5}}{2} a_{n+1} + \\ &+ \frac{1 + \sqrt{5}}{2} a_{n+1} - a_n = a_{n+2} + a_{n+1} - a_n = 0. \end{aligned}$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$b_n = \left( -\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n b_0.$$

Однако поскольку  $\left| -\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right| > 1$ , а последовательность  $\{b_n\}$  ограничена, то  $b_0 = 0$ . Следовательно,  $b_n = 0$  не только при  $n = 0$ , но и при всех натуральных  $n$ , откуда

$$a_{n+1} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} a_n.$$

а поскольку  $a_0 = 1$ , то

$$a_n = \left( \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right)^n.$$

Таким образом, свойства, указанные в задаче, однозначно определяют последовательность.

12. Рассмотрим числовую последовательность, определенную соотношениями

$$a_0 = 2, \quad a_n = a_{n-1}^2 - n \quad \text{при} \quad n \geq 1. \quad (1)$$

Докажем, что все  $a_n$  удовлетворяют неравенству

$$a_n > n. \quad (2)$$

Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что неравенство (2) выполняется для  $a_0, a_1, a_2, a_3$ . Предположим, что  $a_k > k$  для некоторого  $k \geq 3$ . Тогда в силу определяющих соотношений (1)

$$a_{k+1} = a_k^2 - (k+1) > k^2 - (k+1) = k^2 - k + 1.$$

Поскольку для  $k \geq 3$  справедливо легко проверяемое неравенство

$$k^2 - k - 1 > k + 1,$$

то

$$a_{k+1} > k + 1,$$

что и завершает доказательство.

Из полученного неравенства следует, что

$$a_n > 0 \quad \text{для любого} \quad n \geq 0. \quad (3)$$

Из определяющих соотношений для  $a_n$  и неравенства (3) получаем последовательно цепочку неравенств

$$\begin{aligned} a_0 &> 0, & a_3 &= [(a_0^2 - 1) - 2]^2 - 3 > 0, \\ a_1 &= a_0^2 - 1 > 0, & a_4 &= \{ [(a_0^2 - 1)^2 - 2]^2 - 3 \}^2 - 4 > 0, \\ a_2 &= (a_0^2 - 1)^2 - 2 > 0, & & \dots \end{aligned}$$

Разрешая их относительно  $a_0$ , получаем

$$\begin{aligned} a_0 &> 0, & a_0 &> \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3}}}, \\ a_0 &> 1, & a_0 &> \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \sqrt{4}}}}, \\ a_0 &> \sqrt{1 + \sqrt{2}}, & & \dots \end{aligned}$$

и т. д. Вообще, для любого натурального  $n$

$$a_0 = 2 > \sqrt{1 + \sqrt{2 + \sqrt{3 + \dots + \sqrt{n}}}}.$$



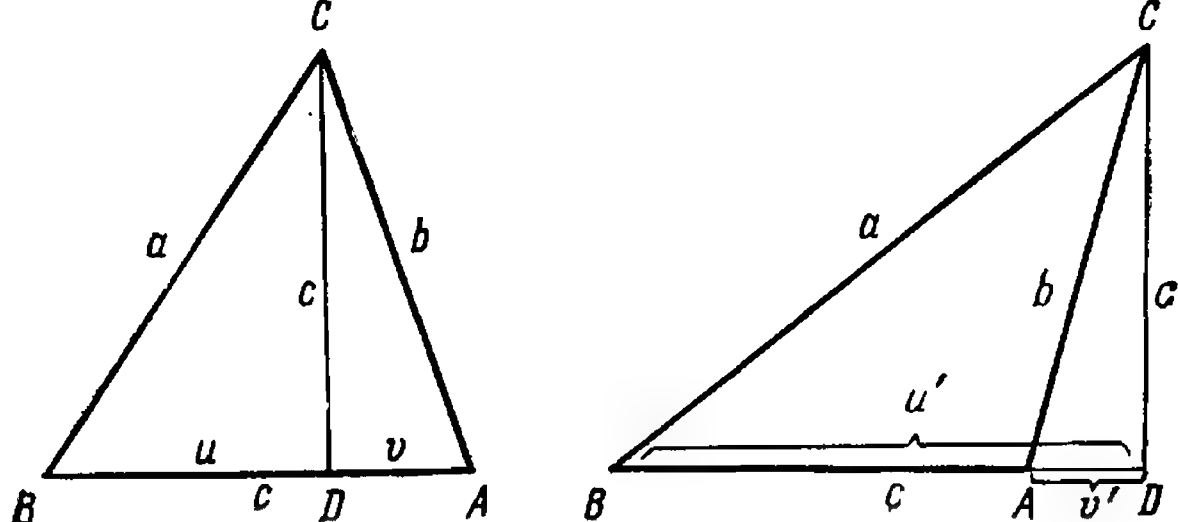


Рис. 15.

13. Ответ на вопрос задачи отрицателен: треугольника с указанными в условии задачи свойствами не существует. Докажем это.

Пусть  $ABC$  — треугольник, длины сторон которого выражаются натуральными числами  $a$ ,  $b$  и  $c$  (рис. 15), и пусть высота  $CD$  равна основанию треугольника  $BA$ .

Заметим прежде всего, что  $a \neq b$  (в противном случае должно было бы выполняться равенство  $(2a)^2 = 5c^2$ , что невозможно). Не ограничивая общности, предположим, что  $a > b$ . (Заметим, что неравенство  $b \leq c$  выполняться также не может.)

Учитывая соотношения между элементами треугольника, получаем следующую систему равенств: либо

$$\begin{cases} a^2 = c^2 + u^2, & (1) \\ b^2 = c^2 + v^2, & (2) \\ c = u + v, & (3) \end{cases}$$

либо

$$\begin{cases} a^2 = c^2 + u'^2, & (1') \\ b^2 = c^2 + v'^2, & (2') \\ c = u' - v', & (3') \end{cases}$$

где  $u$ ,  $v$ ,  $u'$ ,  $v'$  — натуральные числа.

Докажем, например, что числа  $u$  и  $v$  натуральные. Поскольку  $a > c$ , то  $k = u^2 = a^2 - c^2$  — натуральное число, а  $u = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2c}$ ,

вообще говоря, положительное рациональное число. Представим его в виде  $u = p/q$ , где  $p$  и  $q$  — натуральные числа, такие, что  $(p, q) = 1$  \*.

Возведя в квадрат обе части выражения  $u = p/q$  и воспользовавшись тем, что число  $k = u^2$  натуральное, получим  $p^2 = kq^2$ , откуда следует, что  $q = 1$ . Но тогда  $u = p$  и  $v = c - p$  — натуральные числа. Аналогичным образом можно доказать, что числа  $u'$  и  $v'$  тоже натуральные.

\* Принятый в теории чисел символ  $(x, y) = z$  означает, что общий наибольший делитель чисел  $x$  и  $y$  равен  $z$ . Если  $z = 1$ , то  $x$  и  $y$  взаимно простые числа. — Прим. перев.

Итак, решение исходной задачи сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = u^2 - v^2, \\ c = u + v, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = u^2 - v^2, \\ c = u - v \end{cases}$$

в натуральных числах  $a, b, c, u, v$ , где  $a > b > c$ .

Докажем \*, что все решения уравнения  $a^2 - b^2 = u^2 - v^2$  в натуральных числах  $a, b, u, v$ , где  $a > b$ , определяются выражениями

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{2}(ms + nr), & b &= \frac{1}{2}(ms - nr), \\ u &= \frac{1}{2}(ns + mr), & v &= \frac{1}{2}(ns - mr), \end{aligned} \quad (4)$$

где  $m, n, r, s$  — натуральные числа, такие, что  $(m, n) = 1$ ,  $ms > nr$ ,  $ns > mr$ , причем либо оба числа  $r$  и  $s$  четные, либо все числа  $m, n, r, s$  нечетные. Каждое решение уравнения  $a^2 - b^2 = u^2 - v^2$  в натуральных числах встречается среди чисел, определяемых выражениями (4) один и только один раз.

Предположим, что  $a, b, u, v$  — натуральные числа, удовлетворяющие уравнению  $a^2 - b^2 = u^2 - v^2$ . Пусть  $s = (a + b, u + v)$ . Тогда  $a + b = ms$ ,  $u + v = ns$ , где  $m$  и  $n$  — натуральные числа, такие, что  $(m, n) = 1$ . Подставляя полученные значения  $a + b$  и  $u + v$  в уравнение  $(a + b)(a - b) = (u + v)(u - v)$ , находим  $(a - b)m = (u - v)n$ . Поскольку  $(m, n) = 1$ , то  $n | (a - b)$  \*\*, а так как  $a > b$ , то  $a - b = nr$ , где  $r$  — некоторое натуральное число. Подставляя  $a - b = nr$  в уравнение, преобразуем его к виду  $nrm = (u - v)n$ , откуда  $u - v = mr$ . Разрешая равенства  $a + b = ms$ ,  $u + v = ns$ ,  $a - b = nr$ ,  $u - v = mr$  относительно  $a, b, u$  и  $v$ , получаем выражения (4).

Поскольку числа  $u$  и  $v$  натуральные, то должны выполняться неравенства  $ns > mr$  и  $ms > nr$ . Кроме того, оба числа  $r$  и  $s$  должны быть либо четными, либо нечетными. Действительно, если бы число  $r$  было нечетным, а  $s$  четным, то из равенства  $ms + nr = 2a$  следовало бы, что число  $n$  четное, а из равенства  $ns + mr = 2u$  — что число  $m$  тоже четное. Одновременная четность  $m$  и  $n$  противоречит тому, что  $(m, n) = 1$ . Если же оба числа  $r$  и  $s$  нечетные, то из равенства  $ms + nr = 2a$  следует, что и числа  $m$  и  $n$  нечетные (ибо они не могут быть одновременно четными, поскольку  $(m, n) = 1$ , и не могут быть различной четности, поскольку  $ms + nr = 2a$ ). Таким образом, либо оба числа  $r$  и  $s$  четные, либо все числа  $m, n, r$  и  $s$  нечетные.

С другой стороны, если натуральные числа  $m, n, r$  и  $s$ , где  $(m, n) = 1$ , обладают указанными свойствами, причем  $ns > mr$  и

\* Формулировка и доказательство приводимого ниже утверждения заимствованы из книги W. Sierpiński, Teoria liczb, cz. II, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa, 1959, стр. 83—84. — Прим. перев.

\*\*  $x | y$  означает « $x$  делит  $y$ », или « $y$  делится на  $x$ ». — Прим. перев.

$ms > nr$ , то числа  $a, b, u$  и  $v$ , определяемые выражениями (4), как нетрудно проверить, удовлетворяют уравнению  $a^2 - b^2 = u^2 - v^2$ . Нетрудно также проверить, что каждое решение этого уравнения среди чисел, определяемых выражениями (4), встречается один и только один раз. Действительно, из формул (4) следует, что  $a + b = ms$ ,  $u + v = ns$ . Эти равенства означают (поскольку  $(m, n) = 1$ ), что  $s = (a + b, u + v)$ . Отсюда мы с легкостью заключаем, что числа  $s, m, n$  и  $r$  полностью определяются числами  $a, b, u$  и  $v$ . Таким образом, наше утверждение доказано.

Комбинируя выражения (4) с равенствами (1) и (3) [или (2) и (3)], получаем

$$m^2 s^2 + n^2 r^2 = 4n^2 s^2 + n^2 s^2 + m^2 r^2,$$

или

$$(m^2 - n^2)(s^2 - r^2) = (n^2 - m^2)(r^2 - s^2) = 4n^2 s^2, \quad (5)$$

причем  $(m, n) = 1$ .

Докажем, что уравнение (5), а следовательно, и уравнение

$$(m^2 - n^2)(s^2 - r^2) = 4m^2 r^2, \quad (5')$$

получающееся при подстановке выражений (4) в равенства (1') и (3'), не имеет решений в натуральных числах.

Не уменьшая общности, предположим, что  $(r, s) = 1$ . (Если бы  $(r, s) = d > 1$ , то мы могли бы положить  $r = dr_1$ ,  $s = ds_1$ , откуда  $(m^2 - n^2)(s_1^2 - r_1^2) = 4n^2 s_1^2$ , где  $(r_1, s_1) = 1$ .)

Пусть  $(m^2 - n^2, 4s^2) = \alpha$  при  $m > n$ . Тогда  $m^2 - n^2 = \alpha\gamma$ ,  $4s^2 = \alpha\delta$ , где  $\gamma$  и  $\delta$  — натуральные числа, причем  $(\gamma, \delta) = 1$ . Подставляя эти выражения в уравнение (5), получаем  $(s^2 - r^2)\alpha\gamma = n^2\alpha\delta$ , или  $(s^2 - r^2)\gamma = n^2\delta$ . Поскольку  $(\gamma, \delta) = 1$ , то  $\delta | (s^2 - r^2)$  и, следовательно,  $s^2 - r^2 = \beta\delta$ , где  $\beta$  — некоторое натуральное число. Таким образом,  $\beta\gamma\delta = n^2\delta$ , или, окончательно,  $n^2 = \beta\gamma$ . С другой стороны, если  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  — натуральные числа и  $m^2 - n^2 < \alpha\gamma$ ,  $s^2 - r^2 = \beta\delta$ ,  $n^2 = \beta\gamma$ ,  $4s^2 = \alpha\delta$ , то  $(m^2 - n^2)(s^2 - r^2) = 4n^2 s^2$ .

Поскольку  $(m^2 - n^2, n^2) = 1$  (это следует из того, что  $(m, n) = 1$ ), то  $\gamma = 1$ , а из равенств  $s^2 - r^2 = \beta\delta$ ,  $4s^2 = \alpha\delta$  и  $4s^2 - 4(s^2 - r^2) = 4r^2$  мы заключаем, что  $\delta | 4r^2$  и  $\delta | 4s^2$ . Однако поскольку  $(r, s) = 1$ , то  $(r^2, s^2) = 1$  и, следовательно,  $\delta | 4$ . Таким образом, либо  $\delta = 4$ , либо  $\delta = 2$ , либо  $\delta = 1$ .

Если  $\delta = 4$ , то  $m^2 - n^2 = s^2$ ,  $s^2 - r^2 = 4n^2$ , поэтому  $s^2 + n^2 = m^2$ ,  $r^2 + (2n)^2 = s^2$ . Последнее из равенств (поскольку  $(r, s) = 1$ ) означает, что существуют натуральные числа  $p$  и  $q$ , такие, что  $n = pq$ ,  $s = p^2 + q^2$ ,  $(p, q) = 1$ . Следовательно,  $s^2 + n^2 = p^4 + 3p^2q^2 + q^4 = m^2$ .

Как доказал Г. Ч. Поклингтон \*, уравнение  $x^4 + kx^2y^2 + y^4 = z^2$  не имеет решений в натуральных числах  $x, y, z$  при некоторых значениях  $k$ , в том числе при  $k = 3$ .

Если  $\delta = 2$ , то  $m^2 - n^2 = 2s^2$ ,  $s^2 - r^2 = 2n^2$ , или  $n^2 + 2s^2 = m^2$ ,  $r^2 + 2n^2 = s^2$ . Умножив обе части первого равенства на  $r^2$ , а второго — на  $m^2$ , получим  $n^2r^2 + 2r^2s^2 = m^2r^2$ ,  $m^2r^2 + 2m^2n^2 = m^2s^2$ , откуда  $2m^2n^2 + 2r^2s^2 = m^2s^2 - n^2r^2$ . Положим  $x = mn$ ,  $y = rs$ ,  $a_1 = (ms + nr)/2$ ,  $b_1 = (ms - nr)/2$ . Поскольку число  $m^2s^2 - n^2r^2$  четно, то числа  $ms$  и  $nr$  либо оба четны, либо оба нечетны. Отсюда

\* H. C. Pocklington, Proc. Cambridge Phil. Soc., 17, 108 (1914).

следует, что  $a_1$  и  $b_1$  — натуральные числа. Нетрудно проверить, что  $x^2 + y^2 = 2a_1b_1$ ,  $xy = a_1^2 - b_1^2$ . Следовательно,  $x^4 + 3x^2 + y^4 = (a_1^2 + b_1^2)^2$ . Итак, мы снова пришли к уравнению Поклингтона, не имеющему решений в натуральных числах.

Наконец, если  $\delta = 1$ , то  $m^2 - n^2 = 4s^2$ ,  $s^2 - r^2 = n^2$ . Из уравнения Пифагора  $n^2 + (2s)^2 = m^2$  (учитывая, что  $(m, n) = 1$ ) мы заключаем, что  $s$  — четное число. Из другого же уравнения Пифагора  $n^2 + r^2 = s^2$  — поскольку  $(r, s) = 1$  — следует, что  $s$  — нечетное число. Таким образом, система уравнений

$$\begin{cases} n^2 + (2s)^2 = m^2, \\ n^2 + r^2 = s^2 \end{cases}$$

противоречива.

Аналогичным образом можно доказать, что случай  $m < n$ , так же как и уравнение (5'), приводит к противоречию.

Таким образом, треугольника с целочисленными сторонами, у которого высота, опущенная на основание, была бы равна основанию, не существует.

14. Нетрудно проверить, что справедливо следующее тождество:

$$\frac{1}{2n} + \frac{1}{2n(2n+1)} = \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{n(2n+1)}.$$

Из него следует, что уравнение

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{d} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \quad (1)$$

имеет бесконечно много решений в натуральных числах, удовлетворяющих при  $a = 2n$ ,  $b = 2n + 1$ ,  $c = n(2n + 1)$ ,  $d = 2n(2n + 1)$  и  $n > 1$  неравенству

$$a < b < c < d. \quad (2)$$

Покажем, что не существует четырех простых чисел, удовлетворяющих уравнению (1) и неравенству (2). Доказательство будем проводить от противного. Предположим, что такая четверка простых чисел существует. Преобразуя уравнение (1), без труда получаем, что

$$cd(b - a) = ab(d - c).$$

Отсюда следует, что  $b | cd(b - a)$  \*. Поскольку число  $b$  взаимно просто с произведением  $cd$ , то  $b | (b - a)$ , что, однако, невозможно.

15. Ответ на вопрос задачи отрицателен: для любых двух положений  $A$  и  $B$  четырехгранника на плоскости можно указать путь, ведущий из  $A$  в  $B$  и обладающий тем свойством, что из  $B$  в  $A$  нельзя вернуться иначе, чем по пути, который хотя бы частично совпадает с первоначальным. Чтобы убедиться в правильности высказанного утверждения, достаточно взглянуть на рис. 16. Отрицательный

\* См. примечание на стр. 120.

ответ на вопрос задачи будет получен, если мы, выйдя из поля  $A$ , будем обходить его по спирали до тех пор, пока не встретим поле  $B$ .

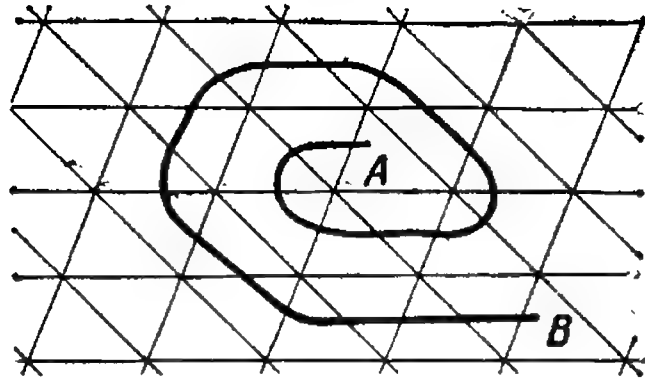


Рис. 16.

16. Идея задачи, как трудно догадаться, была подсказана автору конструкцией роторпоршневого двигателя Феликса Ванкеля — двигателя внутреннего сгорания с вращающимся поршнем. Несколько лет назад схема этого необычного двигателя широко обсуждалась\*. В двигателе Ванкеля поршень (а по сути дела — ротор, имеющий форму призмы, в основании которой лежит равносторонний треугольник) вращается внутри камеры, скользя боковыми ребрами по ее стенкам. (Разумеется, мы приводим лишь идеализированную геометрическую схему двигателя. В реальной конструкции между боковыми ребрами ротора и стенками камеры имеются зазоры.) С геометрической точки зрения движение ротора сводится к движению равностороннего треугольника, расположенного внутри некоторой замкнутой кривой, при котором вершины треугольника скользят по этой кривой. Поскольку двигатель должен производить работу и движение ротора необходимо передать машине, центр треугольника должен описывать окружность. Следует иметь в виду, что окружность не может быть той кривой, по которой движутся вершины треугольника, ибо в противном случае часть камеры, отсеченная ротором, сохраняла бы неизменный объем и при его вращении не возникала бы циклическая смена фаз сжатия.

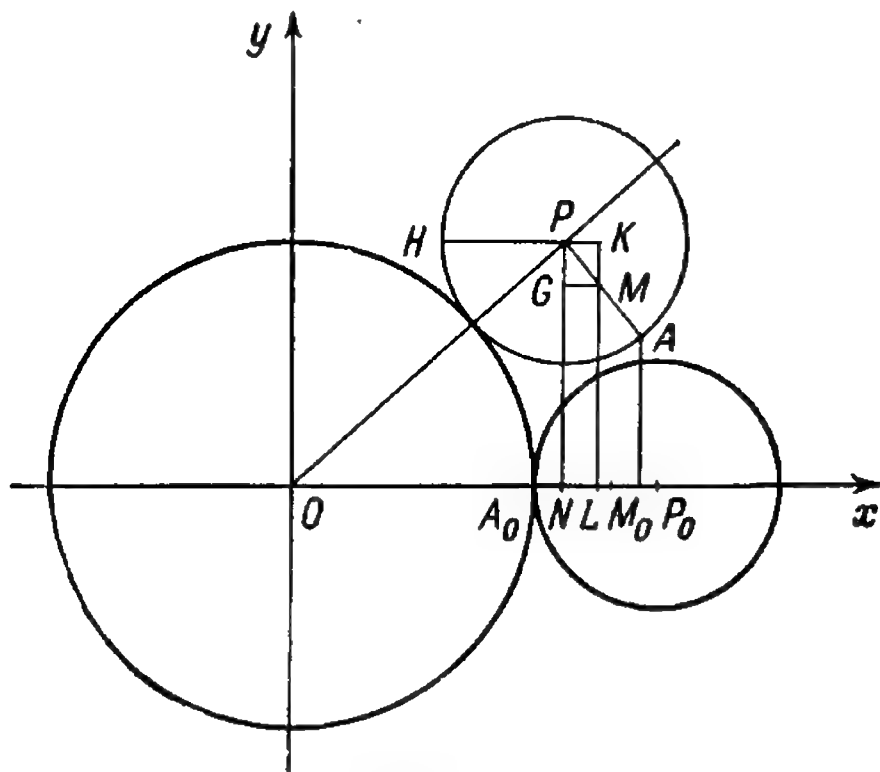


Рис 17.

\* См В. С. Бениович, Г. Д. Апазиди, А. М. Бойко Роторпоршневые двигатели, М., изд-во «Машиностроение», 1968.

В задаче рассматривается лишь одна из возможных кривых, возникающих в теории двигателя Ванкеля.

Движение равностороннего треугольника внутри замкнутой кривой допускает обобщение на случай произвольного правильного многоугольника.

Прежде всего выведем уравнение кривой, которую описывает точка, «прикрепленная» к малому кругу. Центр большого круга поместим в начале координат (рис. 17). Пусть  $P_0$  — начальное положение центра кружка (на оси  $x$ ), а  $P$  — положение, которое он займет, описав дугу  $t$ . Начальная точка касания  $A_0$  перейдет при этом в точку  $A$ , а прикрепленная точка из положения  $M_0$  переместится в положение  $M$ .

Поскольку радиус кружка в 2 раза меньше радиуса круга,  $\angle OPA = 2t$ . Следовательно,  $\angle HPA = 3t$ , где  $HP \parallel OP_0$ . Пусть  $x = OL$  и  $y = LM$  — координаты точки  $M$ . Тогда

$$x = ON + NL = ON + PK$$

и

$$ON = 9 \cos t,$$

$$PK = PM \cos(\angle MPK) = -PM \cos(\angle HPM) = -\cos 3t,$$

а

$$y = PN - PG = 9 \sin t - \sin 3t.$$

Таким образом, уравнение искомой кривой можно представить в параметрическом виде

$$x = 9 \cos t - \cos 3t,$$

$$y = 9 \sin t - \sin 3t \quad (*)$$

Докажем, что равносторонний треугольник  $T$ , вписанный в кривую (\*), можно двигать так, что все его вершины будут одновременно пробегать всю кривую. Для этого достаточно доказать, что если  $Q_1(x_1, y_1)$  — некоторая точка кривой (\*), соответствующая значению параметра  $t_1$ , а  $Q_2(x_2, y_2)$  — другая точка той же кривой, соответствующая значению параметра  $t_2 = t_1 + 2\pi/3$ , то расстояние между ними

$$Q_1Q_2 = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

не зависит от положения точки  $Q_1$ , или, что то же, от значения параметра  $t_1$ .

Действительно,

$$\cos t_2 = \cos \left( t_1 + \frac{2\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2} (\cos t_1 + \sqrt{3} \sin t_1),$$

$$\sin t_2 = \frac{1}{2} (\sqrt{3} \cos t_1 - \sin t_1),$$

откуда

$$x_2 = 9 \cos t_2 - \cos 3t_2 = -\frac{9}{2} (\cos t_1 + \sqrt{3} \sin t_1) - \cos 3t_1$$

и

$$\begin{aligned} x_2 - x_1 &= \left[ -\frac{9}{2} (\cos t_1 + \sqrt{3} \sin t_1) - \cos 3t_1 \right] - (9 \cos t_1 - \cos 3t_1) = \\ &= -\frac{27}{2} \cos t_1 - \frac{9\sqrt{3}}{2} \sin t_1. \end{aligned}$$

Аналогично вычисляется и разность  $y_2 - y_1$ :

$$y_2 - y_1 = \frac{9\sqrt{3}}{2} \cos t_1 - \frac{27}{2} \sin t_1.$$

Таким образом,

$$Q_1 Q_2 = \frac{2}{9} \sqrt{(9 \cos t_1 + \sqrt{3} \sin t_1)^2 + (9 \sin t_1 - \sqrt{3} \cos t_1)^2} = 9\sqrt{3}.$$

Следовательно, треугольник с вершинами в точках  $Q_1(x_1, y_1)$ ,  $Q_2(x_2, y_2)$  и  $Q_3(x_3, y_3)$ , лежащих на кривой и соответствующих значениям параметра  $t_1$ ,  $t_1 + 2\pi/3$  и  $t_1 + 4\pi/3$ , равносторонний. Если его вершина  $Q_1$  описывает всю кривую (что происходит при изменении параметра  $t_1$  от 0 до  $2\pi$ ), то треугольник  $T$  движется так, что и две остальные его вершины также описывают всю кривую.

Отвечая на первый вопрос задачи, мы одновременно ответили и на второй вопрос: длина стороны треугольника  $T$  равна  $9\sqrt{3}$  см.

Докажем теперь, что траекторией центра треугольника  $T$  при движении его вершин по кривой (\*) служит окружность радиусом 1 см с центром в начале координат (иначе говоря, центр траектории совпадает с центром большого круга).

Координаты центра треугольника  $Q_1 Q_2 Q_3$  (он же треугольник  $T$ ) обозначим  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$ . Как известно,

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad \bar{y} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} x_3 &= 9 \left( \cos t_1 \cos \frac{4\pi}{3} - \sin t_1 \sin \frac{4\pi}{3} \right) - \cos 3 \left( t_1 + \frac{4\pi}{3} \right) = \\ &= \frac{2}{9} (-\cos t_1 + \sqrt{3} \sin t_1) - \cos 3t_1, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{3} \left( 9 \cos t_1 - \cos 3t_1 - \frac{9}{2} \cos t_1 - \frac{9}{2} \sqrt{3} \sin t_1 - \cos 3t_1 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{9}{2} \cos t_1 + \frac{9}{2} \sqrt{3} \sin t_1 - \cos 3t_1 \right) = -\cos 3t_1. \end{aligned}$$

Аналогично  $\bar{y} = -\sin 3t_1$ . Исключая из  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$  параметр  $t_1$ , получаем уравнение  $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = 1$ . Итак, центр окружности описывает вокруг начала координат окружность радиусом 1 см, причем за то время, пока каждая из вершин обегит кривую (\*) один раз, центр треугольника успевает трижды описать окружность  $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = 1$ .

17. Пусть  $r_1$  и  $r_2$  — радиусы окружностей  $K_1$  и  $K_2$ . Не уменьшая общности, можно считать, что  $r_2 \geq r_1$ . Пусть  $O_1$  и  $O_2$  — центры окружностей  $K_1$  и  $K_2$ ,  $d$  — расстояние между точками  $O_1$  и  $O_2$ , а  $l$  — длина линейки. Пусть, далее,  $AB$  — диаметр окружности  $K_1$ ,  $CD$  — диаметр окружности  $K_2$ ,  $l_C$  — расстояние от точки  $C$  до произвольной точки окружности  $K_1$  и, наконец,  $l_D$  — расстояние от точки  $D$  до произвольной точки окружности  $K_2$ .



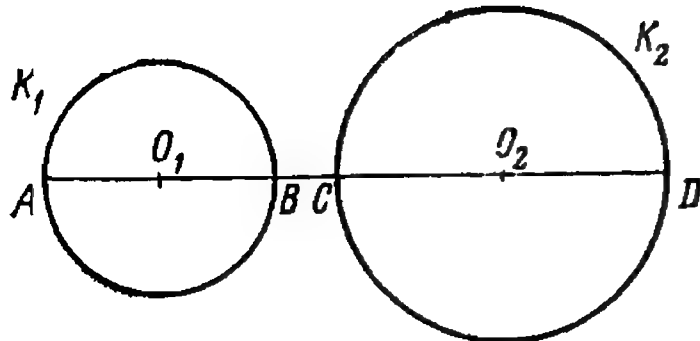


Рис. 18.

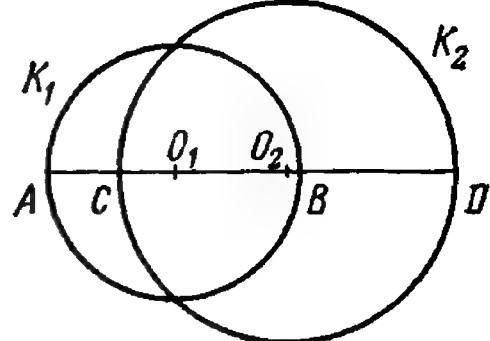


Рис. 19.

1. Предположим, что  $r_2 > r_1$  и  $d > r_1$ .

а) Рассмотрим случай, когда окружности расположены одна вне другой (рис. 18). Поскольку при этом

$$l_C \leq CA = d + r_1 - r_2,$$

$$l_D \geq DB = d + r_2 - r_1,$$

то

$$d + r_2 - r_1 \leq l \leq d + r_1 - r_2.$$

Полученные неравенства противоречивы, поскольку

$$d + r_1 - r_2 < d + r_2 - r_1.$$

б) Если две окружности касаются извне, то с помощью аналогичных рассуждений мы приходим к тому же противоречию.

в) Возникает противоречие и в том случае, если окружности пересекаются, но при этом  $CB \leq r_1$ .

г) Рассмотрим теперь случай, когда окружности пересекаются, но  $CB > r_1$  (рис. 19). Имеем

$$l_C \leq CB = r_2 - d + r_1;$$

$$l_D \geq DB = r_2 + d - r_1.$$

Следовательно,

$$r_2 + d - r_1 \leq l \leq r_2 - d + r_1.$$

Мы снова пришли к противоречию, ибо  $r_2 - d + r_1 < r_2 + d - r_1$ .

д) При внутреннем касании окружностей противоречие возникает так же, как и в предыдущем случае.

е) Рассмотрим случай, когда одна окружность лежит внутри другой. Так же как и в случае г), мы приходим к противоречию, поскольку

$$l_C \leq CB = r_2 - d + r_1,$$

$$l_D \geq DB = r_2 + d - r_1,$$

и, следовательно,

$$r_2 + d - r_1 \leq l \leq r_2 - d + r_1.$$

Вообще, если  $r_2 > r_1$  и  $d > r_1$ , то окружности  $K_1$  и  $K_2$  нельзя одновременно описать концами линейки.

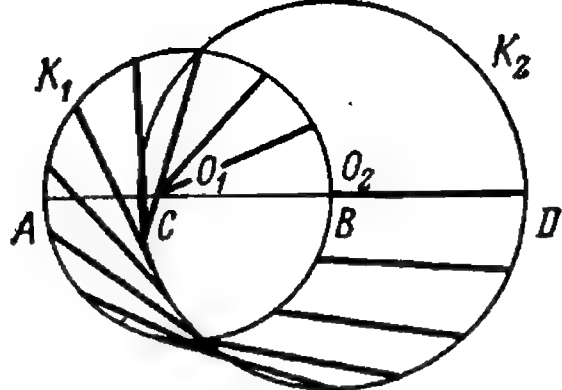


Рис. 20.

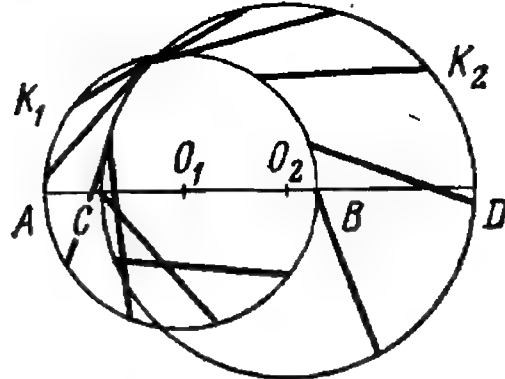


Рис. 21.

2. Предположим, что  $r_2 > r_1$  и  $d = r_1$ .

а) Рассмотрим случай, когда окружности пересекаются (рис. 20). Нетрудно видеть, что справедливы неравенства

$$l_C \leq CB = r_2 - d + r_1,$$

$$l_D \geq DB = r_2 + d - r_1,$$

откуда

$$r_2 + d - r_1 \leq l \leq r_2 - d + r_1,$$

а поскольку  $d = r_1$ , то  $r_2 \leq l \leq r_2$  и, следовательно,  $l = r_2$ . Но если линейка имеет длину  $r_2$ , то пока один ее конец описывает один раз окружность  $K_2$ , другой успевает два раза описать окружность  $K_1$  (рис. 20). Иначе говоря, пока один конец линейки опишет один раз окружность  $K_1$ , другой успеет описать лишь половину окружности  $K_2$ . Следовательно, в рассматриваемом нами случае концами линейки невозможно одновременно описать две окружности.

б) Аналогично обстоит дело и в случае внутреннего касания окружности, а также если одна окружность лежит внутри другой.

Вообще, если  $r_2 > r_1$  и  $d = r_1$ , то окружности  $K_1$  и  $K_2$  нельзя одновременно описать концами линейки.

3. Рассуждения, аналогичные тем, которые мы проводили в пунктах 1 и 2, заставляют прийти к выводу, что при  $r_1 = r_2$  и  $d \geq r_1$  окружности  $K_1$  и  $K_2$  можно одновременно описать концами линейки лишь при условии, если длина линейки равна расстоянию между центрами ( $l = d$ ). О двух тривиальных случаях, удовлетворяющих этому условию, говорилось в условии задачи.

4. Предположим, что  $r_2 \geq r_1$  и  $d < r_1$ .

а) Рассмотрим случай, когда окружности пересекаются (рис. 21).

При этом

$$l_C \leq CB = r_2 - d + r_1,$$

$$l_D \geq DB = r_2 + d - r_1,$$

откуда

$$r_2 + d - r_1 \leq l \leq r_2 - d + r_1.$$

Эти неравенства не приводят к противоречию. Окружности  $K_1$  и  $K_2$  можно одновременно описать концами линейки длиной  $l$ , удовлетворяющей этим неравенствам, если действовать так, как показано на рис. 21.

б) Аналогичен случай внутреннего и внешнего касания окружностей.

Вообще, если  $r_2 \geq r_1$  и  $d < r_1$ , то окружности  $K_1$  и  $K_2$  можно одновременно описать концами линейки длиной  $l$ , удовлетворяющей неравенствам

$$r_2 + d - r_1 \leq l \leq r_2 - d + r_1.$$

Поскольку утверждения, сформулированные в пп. 1—4, образуют замкнутую систему, всякое утверждение, обратное им, истинно.

Итак, для того чтобы концами линейки можно было одновременно описать две окружности, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

либо

$$r_2 = r_1, \quad d \geq r_1, \quad l = d,$$

либо

$$r_2 \geq r_1, \quad d < r_1, \quad r_2 + d - r_1 \leq l \leq r_2 - d + r_1.$$

18. Пусть  $G$  — выпуклая область, удовлетворяющая условиям задачи, а  $PQRS$  — наименьший по площади из четырехугольников, описанных вокруг  $G$  (рис. 22).

Докажем прежде всего, что точки  $A, B, C$  и  $D$  делят стороны четырехугольника  $PQRS$  пополам. Рассмотрим, например, сторону  $QR$ . Предположим, что  $BQ < BR$ . Поскольку на границе области  $G$  нет изломов и в каждой ее точке существует касательная и притом только одна, то при качении стороны  $QR$  по границе области  $G$  длина отрезка  $QR$  будет непрерывно уменьшаться. Следовательно, на дуге  $CB$  достаточно близко от точки  $B$  должна существовать такая точка  $M$ , для которой  $MK < MV$  и тем более  $NK < NV$ . Рассмотрим теперь отрезок  $NQ$ . Если бы выполнялось неравенство  $NQ \geq NR$ , то точка  $M$  была бы расположена так близко от точки  $B$ , что выполнялось бы неравенство  $NQ < NR$ . Рассмотрим далее треугольники  $VNR$  и  $QNK$ . Поскольку  $\angle VNR = \angle QNK = \alpha$ , то

$$S_{\triangle QNK} = \frac{1}{2} QN \cdot NK \sin \alpha < \frac{1}{2} NR \cdot NV \sin \alpha = S_{\triangle VNR},$$

где  $S_{\triangle QNK}$  и  $S_{\triangle VNR}$  — площади треугольников  $QNK$  и  $VNR$ . Однако это противоречит тому, что четырехугольник  $PQRS$  имеет наименьшую площадь среди всех четырехугольников, описанных вокруг

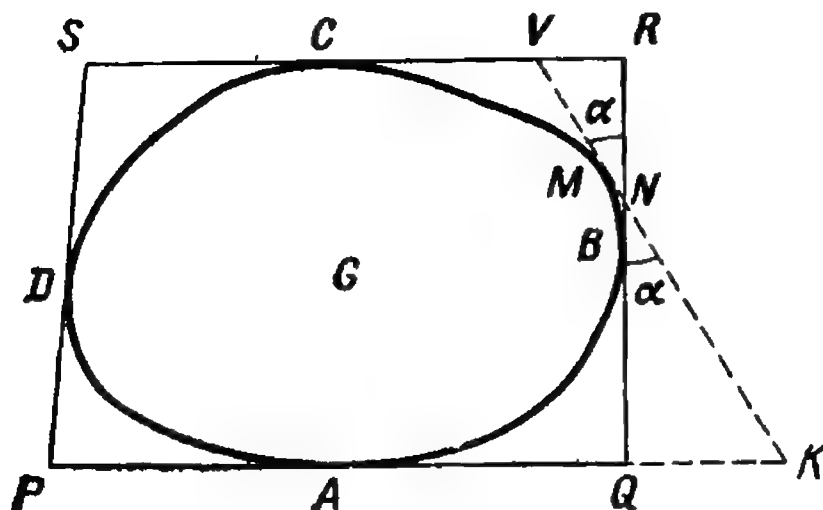


Рис. 22.

$G$ . Следовательно, неравенство  $BQ < BR$  не может выполняться. Аналогично доказывается, что неравенство  $BQ > BR$  также невозможно. Таким образом,  $BQ = BR$ .

Известно, что если в произвольном четырехугольнике соединить последовательно середины сторон отрезками прямых, то получится параллелограмм, площадь которого равна половине площади исходного четырехугольника. Но площадь фигуры  $G$  меньше площади четырехугольника  $PQRS$ . Следовательно, площадь параллелограмма  $ABCD$  больше  $G/2$ .

19. Доказательство утверждения, сформулированного в условии задачи, опирается на следующую лемму.

**Лемма.** Пусть  $AC$  — хорда, соединяющая точки  $A$  и  $C$ , которые лежат на дуге  $AMB$  границы области  $G$ . Тогда среди всех треугольников с основанием  $AC$  и третьей вершиной, лежащей на дуге  $AMB$ , наибольшую площадь имеет треугольник, у которого касательная к границе области  $G$ , проведенная через его вершину  $B$ , параллельна  $AC$ .

**Доказательство.** Проведем через точку  $M$  (рис. 23) прямую, параллельную  $AC$ . Пусть  $N$  — точка пересечения проведенной прямой с дугой  $BC$ . Площадь любого треугольника с основанием  $AC$  и третьей вершиной, лежащей на дуге  $MBN$ , но не совпадающей с точками  $M$  и  $N$ , больше площади треугольника  $AMC$ , поскольку высота любого такого треугольника больше высоты треугольника  $AMC$ . Следовательно, если прямая, параллельная  $AC$ , пересекает дугу границы в двух точках, то площадь треугольника с основанием  $AC$  и третьей вершиной, совпадающей с любой из точек пересечения, не может быть наибольшей среди площадей треугольников с основанием  $AC$  и третьей вершиной, лежащей на дуге  $ABC$ . Однако поскольку из условия задачи следует, что треугольник с наибольшей площадью существует, то прямая, проходящая через его третью вершину параллельно  $AC$ , должна иметь с рассматриваемой дугой границы лишь одну общую точку. По условию задачи эта прямая должна быть касательной к границе области  $G$  в точке  $B$ .

Переходим теперь к доказательству утверждения задачи. Пусть  $ABCD$  — вписанный четырехугольник наибольшей площади (рис. 24). Тогда треугольник  $ABC$  обладает наибольшей площадью среди всех треугольников с основанием  $AC$  и третьей вершиной, лежащей на дуге  $ABC$ . Следовательно, касательная  $ZY$ , проведенная к дуге в

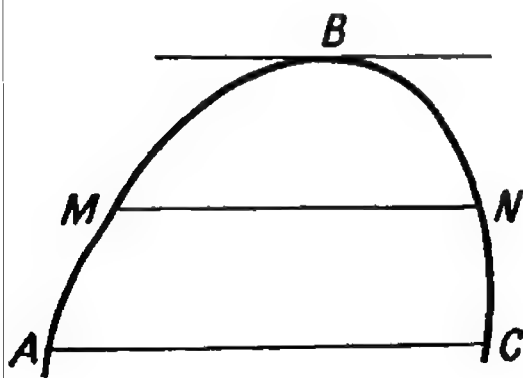


Рис. 23.

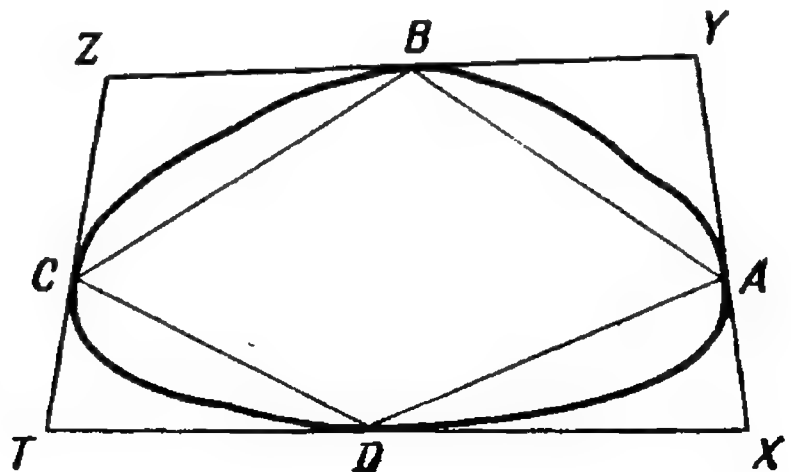


Рис. 24.

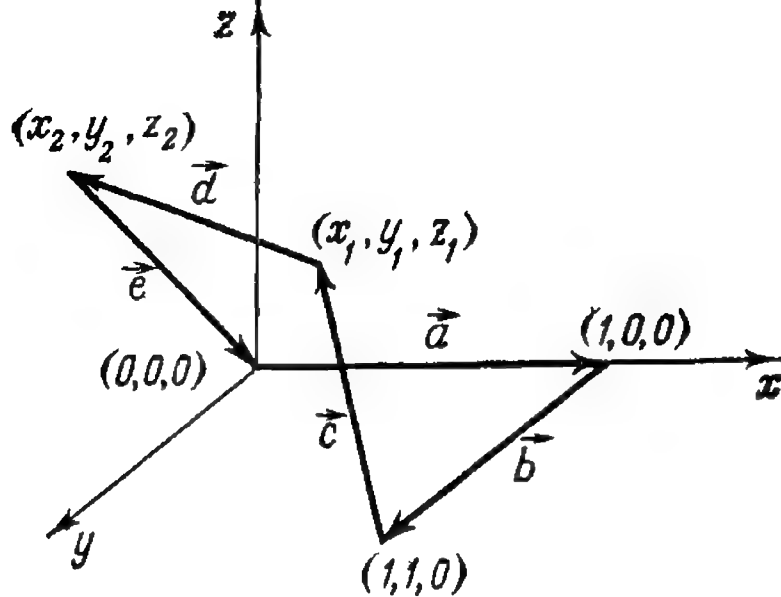


Рис 25.

точке  $B$ , параллельна  $AC$ . Отсюда мы сразу же заключаем, что  $ZY \parallel TX$ . Аналогично доказывается, что  $ZT \parallel YX$ . Таким образом, площадь параллелограмма  $XYZT$  равна удвоенной площади четырехугольника  $ABCD$  и, следовательно, меньше  $2G$ , что и требовалось доказать.

20. Не уменьшая общности, будем считать, что длина стороны пятиугольника, о котором говорится в условии задачи, равна 1. Стороны пятиугольника можно рассматривать как векторы. Пусть вектор  $\vec{a} = (1, 0, 0)$  — одна из сторон пятиугольника, а плоскость, проходящая через  $\vec{a}$  и ортогональный ему вектор  $\vec{b}$ , совпадает с плоскостью  $z = 0$  (рис. 25). Тогда векторы, образующие стороны искомого пятиугольника, будут иметь координаты

$$\begin{aligned} a &= (1, 0, 0), \quad b = (0, 1, 0), \quad c = (x_1 - 1, y_1 - 1, z_1), \\ d &= (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1), \quad e = (x_2, y_2, z_2). \end{aligned}$$

Выпишем условия ортогональности векторов:

- а)  $(x_1 - 1, y_1 - 1, z_1) (0, 1, 0) = 0$ , откуда  $y_1 = 1$ ;
- б)  $(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) (x_1 - 1, y_1 - 1, z_1) = 0$ ;
- в)  $(x_2, y_2, z_2) (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = 0$ ;
- г)  $(x_2, y_2, z_2) (1, 0, 0) = 0$ , откуда  $x_2 = 0$ .

Условия «б» и «в» запишем в виде

$$-x_1^2 + x_1 + z_1 z_2 - z_1^2 = 0, \quad y_2^2 - y_2 + z_2^2 - z_1 z_2 = 0. \quad (1)$$

Поскольку длины сторон искомого пятиугольника равны 1, то

$$(x_1 - 1)^2 + z_1^2 = 1, \quad y_2^2 + z_2^2 = 1, \quad (2)$$

$$x_1^2 + (y_2 - 1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = 1. \quad (3)$$

Система уравнений (1) и (2) допускает следующие решения:

$$x_1 = 1, \quad y_2 = 0, \quad z_1 = 1, \quad z_2 = 1$$

или

$$x_1 = 1, \quad y_2 = 0, \quad z_1 = -1, \quad z_2 = -1.$$

Однако оба решения не удовлетворяют уравнению (3). Следовательно, в трехмерном пространстве не существует пятиугольника с требуемыми свойствами.

21. В предыдущей задаче был поставлен вопрос о том, можно ли построить в пространстве замкнутый пятиугольник, все стороны которого равны, а все углы прямые. Как известно (см. решение задачи 20), ответ на этот вопрос отрицателен. Настоящая задача служит продолжением задачи 20. На этот раз требуется выяснить, существуют ли (и если существуют, то какие) равносторонние «нечетно-угольники» с прямыми углами. Оказывается, что в трехмерном пространстве существуют равносторонние  $(2n - 1)$ -угольники с прямыми углами при  $n = 4, 5, 6, \dots$ , то есть равносторонний и прямоугольный семиугольник, равносторонний и прямоугольный девятиугольник и т. д. Поскольку существование в трехмерном пространстве равносторонних и прямоугольных  $2n$ -угольников при  $n = 2, 3, 4, \dots$  очевидно, то можно сказать, что, за исключением пятиугольника, начиная с  $n = 4$ , в трехмерном пространстве существуют все равносторонние прямоугольные  $n$ -угольники.

Задача будет решена, если нам либо удастся доказать, что в трехмерном пространстве нельзя построить равносторонний «нечетно-угольник» с прямыми углами, либо если мы построим хоть один многоугольник нужного типа. Как известно из решения задачи 20, не существует пятиугольника, все стороны которого были бы равны, а все углы были бы прямыми. Треугольник, очевидно, также не обладает необходимыми свойствами. Докажем, что существует равносторонний семиугольник, у которого все углы прямые.

Введем в пространстве прямоугольную систему координат (рис. 26). Отложим на осях  $OX$  и  $OY$  отрезки  $OA = OB = 1$ . Эти отрезки будем считать сторонами семиугольника. От точки  $A$  в плоскости, параллельной плоскости  $YOZ$ , отложим единичный отрезок

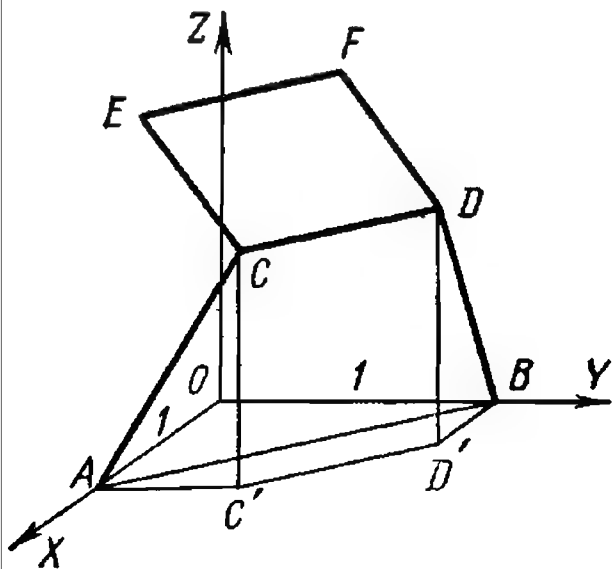


Рис. 26.

$AC$ , а от точки  $B$  в плоскости, параллельной плоскости  $XOZ$ , — единичный отрезок  $BD$  так, чтобы  $\angle CAC' = \angle DBD'$  и  $C'D' = CD = 1$ . В плоскости трапеции  $ABCD$  построим теперь квадрат  $CDef$  (рис. 27). Ясно, что угол  $ACf$  (равный углу  $BDe$ ) — острый, а угол  $ACf'$  (равный углу  $BDe'$ ) — тупой. Следовательно, поворачивая квадрат  $CDef$  в пространстве вокруг стороны  $CD$ , мы найдем такое его положение  $CDFE$  (рис. 26), при котором  $\angle ACE = \angle BDE = 90^\circ$ .

Из построения следует, что  $ACEFDBO$  — семиугольник, удовлетворяющий условиям задачи.

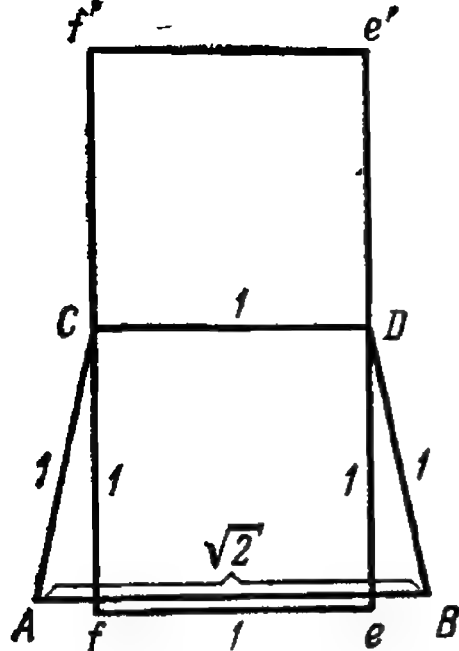


Рис. 27.

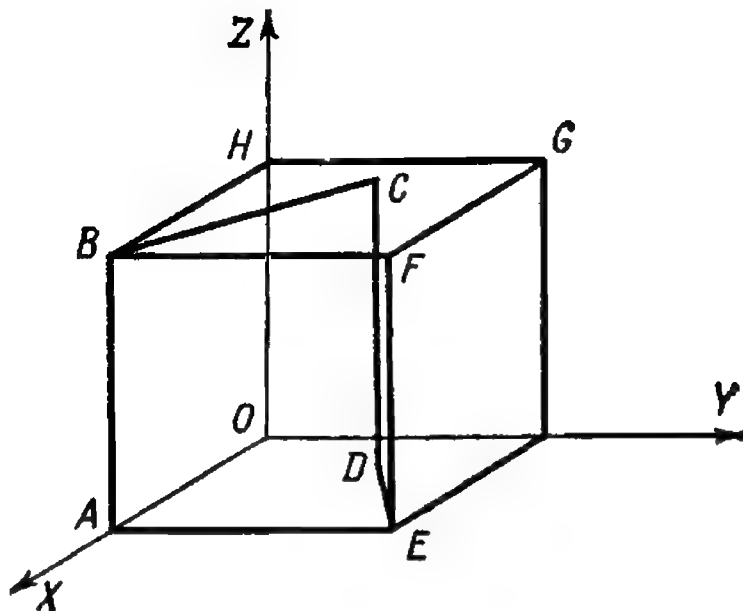


Рис. 28.

Теперь уже нетрудно построить равносторонний девятиугольник с прямыми углами. Для этого достаточно построить в плоскости, перпендикулярной  $CEFD$  (рис. 26), квадрат  $EFGH$ , одной из сторон которого служит отрезок  $EF$ , и стереть сторону  $EF$ . Фигура  $ACEGHFDBO$  и будет искомым равносторонним девятиугольником с прямыми углами. Продолжая достраивать квадраты, перпендикулярные последнему квадрату предыдущей фигуры, мы будем последовательно получать все равносторонние «нечетноугольники» с прямыми углами.

**Примечание.** Равносторонний девятиугольник с прямыми углами легко построить и непосредственно, минуя построение семиугольника. Действительно, рассмотрим единичный квадрат (рис. 28) с вершинами в точках  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$ ,  $(1, 1, 0)$ ,  $(0, 1, 1)$ ,  $(1, 0, 1)$ ,  $(1, 1, 1)$ . На его поверхности выберем точки

$$C = \left( \frac{2 - \sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 1 \right) \quad \text{и} \quad D = \left( \frac{2 - \sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right).$$

Тогда

$$BC = \sqrt{\left( \frac{2 - \sqrt{3}}{2} - 1 \right)^2 + \frac{1}{4}} = 1 \quad \text{и} \quad DE = 1.$$

22. Эта задача так же, как и задача 16, навеяна геометрической теорией двигателя Ванкеля. Однако, как нетрудно видеть, речь в ней идет о построении кривой постоянной ширины. Эта тема неоднократно разбиралась в литературе, поэтому мы не приводим решения задачи\*.

\* Те, кого заинтересуют задачи о кривых постоянной ширины, могут ознакомиться с ними по книгам: Г. Штейнгауз, Математический калейдоскоп, М.—Л., Гостехиздат, 1949; И. М. Яглом и В. Г. Болтянский, Выпуклые фигуры, М.—Л., Гостехиздат, 1951; Г. Радемахер и О. Теплиц, Числа и фигуры, изд. 4-е, М., изд-во «Наука», 1966. — Прим. перев.



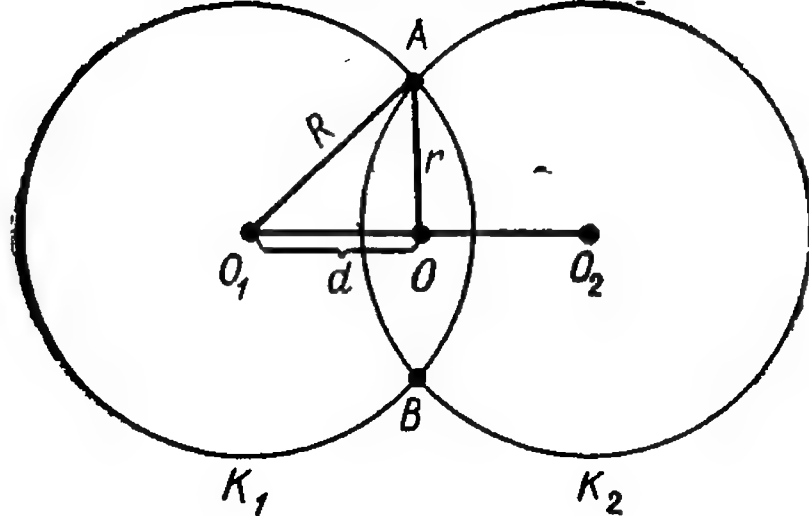


Рис. 29.

23. Центр тяжести  $D$  материальных точек  $A$  и  $C$  с массами, равными соответственно длинам сторон треугольника  $BC$  и  $AB$ , лежит на стороне  $AC$  и делит ее на отрезки  $AD$  и  $DC$ , удовлетворяющие соотношению  $AD : DC = AB : BC$ . Следовательно, прямая  $BD$  есть биссектриса угла  $B$ , центр тяжести системы трех материальных точек  $A$ ,  $B$  и  $C$  совпадает с центром тяжести системы двух материальных точек  $B$  и  $D$  и лежит на биссектрисе  $BD$ . По той же причине центр тяжести системы материальных точек  $A$ ,  $B$  и  $C$  лежит на биссектрисах углов  $A$  и  $C$  и, следовательно, совпадает с точкой пересечения всех трех внутренних углов треугольника  $ABC$ , то есть с центром вписанной в него окружности.

24. Предположим, что у ограниченной фигуры  $F$  существуют не один, а по крайней мере два описанных круга, то есть два круга, накрывающих  $F$  и обладающих наименьшим радиусом (радиусы обоих кругов совпадают) среди всех кругов, накрывающих  $F$ . Обозначим один из них  $K_1(O_1)$ , а другой —  $K_2(O_2)$ . Поскольку каждый из кругов содержит  $F$ , их общая часть также содержит  $F$ . Рассмотрим круг с центром в точке  $O$  — середине отрезка  $O_1O_2$  (рис. 29), граница которого проходит через точки  $A$  и  $B$  — точки пересечения границ кругов  $K_1$  и  $K_2$ . Этот круг содержит общую часть кругов  $K_1$  и  $K_2$  и, следовательно, накрывает фигуру  $F$ , но радиус его  $r$  меньше радиуса  $R$  кругов  $K_1$  и  $K_2$ . Действительно, если  $d = \frac{1}{2}O_1O_2$ , то  $r = OA = \sqrt{R^2 - d^2}$ , и, таким образом,  $r < R$ . Это противоречит тому, что  $R$  — радиус наименьшего круга, накрывающего фигуру  $F$ .

25. На вопрос задачи следует ответить утвердительно. Для доказательства рассмотрим два случая:

I. Остроугольный треугольник  $ABC$  равнобедренный.

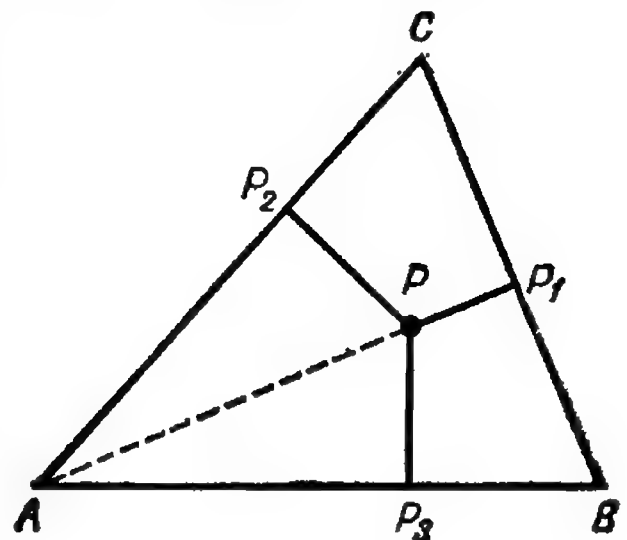


Рис. 30.

Пусть, например,

$$AB = AC = b.$$

На биссектрисе угла  $BAC$  отложим отрезок  $AP$  длиной  $b/\sqrt{3}$  и из точки  $P$  опустим перпендикуляры на стороны треугольника (рис. 30). Пусть  $P_1$ ,  $P_2$  и  $P_3$  — их основания.

Точка  $P$  лежит внутри треугольника  $ABC$ . Это следует из того, что

$$AP = \frac{b}{\sqrt{3}},$$

а

$$AP_1 = b \cos \frac{A}{2}.$$

Действительно, поскольку  $\angle A < 90^\circ$ , то

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos 45^\circ < \cos \frac{A}{2}$$

и, следовательно,

$$AP_1 > \frac{b}{\sqrt{2}}.$$

Таким образом,

$$AP < AP_1,$$

Площади четырехугольников  $AP_2PP_3$ ,  $BP_3PP_1$  и  $CP_1PP_2$  равны. Действительно,

$$\begin{aligned} S_{AP_2PP_3} &= AP \sin \frac{A}{2} \cdot AP \cos \frac{A}{2} = \frac{1}{2} AP^2 \sin A = \\ &= \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} b^2 \sin A \right) = \frac{1}{3} S_{ABC}. \end{aligned}$$

Аналогично вычисляются (и оказываются равными  $1/3 S_{ABC}$ ) площади двух других четырехугольников.

II. Остроугольный треугольник  $ABC$  не равнобедренный.

Не уменьшая общности, предположим, что углы треугольника удовлетворяют неравенству  $A < B < C$ .

Введем прямоугольную систему координат и поместим треугольник  $ABC$  так, чтобы его вершина  $A$  совпала с началом координат, ось  $x$  была биссектрисой угла  $A$  и вершина  $B$  лежала в первом квадранте  $x > 0$ ,  $y > 0$  (рис. 31). Обозначим через  $P(x, y)$  произвольную точку внутри треугольника  $ABC$ , а через  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  — основания перпендикуляров, опущенных из  $P$  на стороны треугольника  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$ . Считая углы направленными, получим

$$\angle DAB = \frac{A}{2}, \quad \angle DAC = -\frac{A}{2}.$$

Пусть далее  $AP = r$  (длина радиуса-вектора, проведенного из начала координат в точку  $P$ ),  $\angle DAP = \Theta$ . Тогда

$$x = r \cos \Theta, \quad y = r \sin \Theta.$$

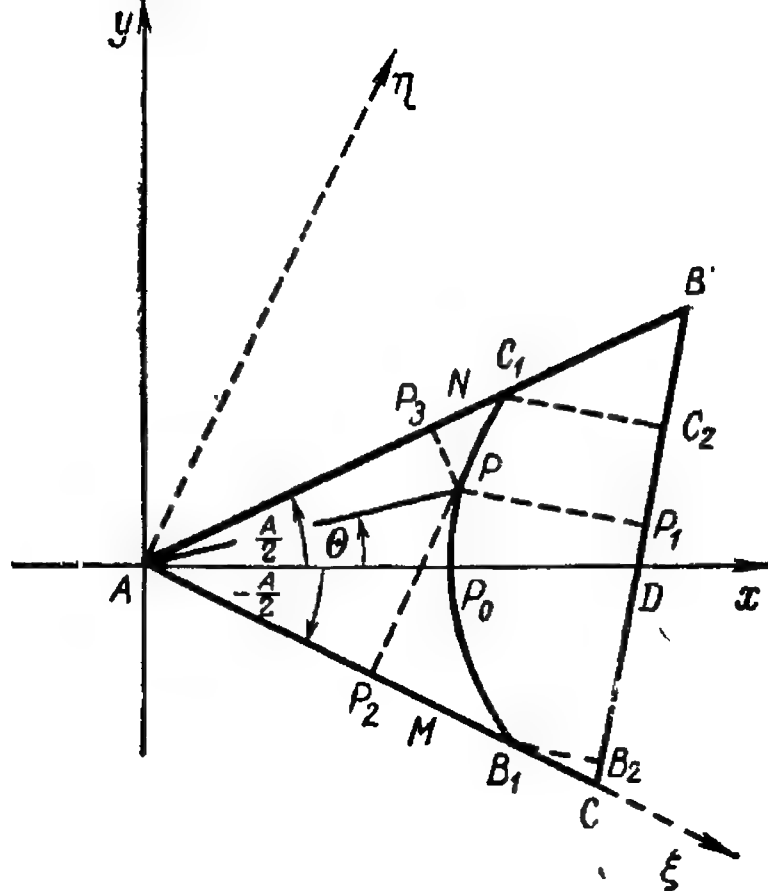


Рис 31.

Вычислим площадь  $p$  четырехугольника  $AP_2PP_3$ :

$$p = \frac{1}{2} r^2 \sin \left( \frac{A}{2} - \theta \right) \cos \left( \frac{A}{2} - \theta \right) + \frac{1}{2} r^2 \sin \left( \frac{A}{2} + \theta \right) \cos \left( \frac{A}{2} + \theta \right) = \\ = \frac{1}{4} r^2 [\sin (A - 2\theta) + \sin (A + 2\theta)],$$

откуда

$$p = \frac{1}{2} r^2 \sin A \cos 2\theta, \quad (1)$$

или, что то же,

$$p = \frac{1}{2} r^2 \sin A (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta).$$

Подставляя  $r \cos \theta = x$ ,  $r \sin \theta = y$ , получаем окончательно

$$p = \frac{\sin A}{2} (x^2 - y^2). \quad (2)$$

Площадь треугольника  $ABC$  вычисляется по формуле

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} bc \sin A, \quad (3)$$

где  $AC = b$ ,  $AB = c$ .

Поскольку по условию задачи  $p = \frac{1}{3} S_{ABC}$ , из соотношений (1) и (3) находим

$$r = r(\theta) = \sqrt{\frac{bc}{3 \cos 2\theta}}. \quad (4)$$

Из формул (2) и (3) получаем

$$x^2 - y^2 = \frac{2p}{\sin A} = \frac{2}{\sin A} \cdot \frac{bc \sin A}{6},$$

откуда

$$x^2 - y^2 = \frac{bc}{3}. \quad (5)$$

Таким образом, точка  $P$  лежит на дуге  $B_1P_0C_1$  равнобочной гиперболы, описываемой уравнением (5) (рис. 31).

Докажем теперь, что точка  $B_1$  лежит между точками  $M$  и  $C$ , где  $M$  — середина отрезка  $AC$ , а  $C_1$  — между точками  $N$  и  $B$ , где  $N$  — середина отрезка  $AB$ . Отсюда будет следовать, что площадь каждого из треугольников  $CB_1B_2$  и  $BC_1C_2$  меньше  $\frac{1}{4}S_{ABC}$ .

Действительно, в остроугольном треугольнике  $ABC$

$$BC \cos B < AC \cos A,$$

поскольку из неравенства  $A < B < C$  следует, что

$$BC < AC \quad \text{и} \quad \cos B < \cos A.$$

Но если  $BC \cos B < AC \cos A$ , то

$$AC \cos A + BC \cos B < 2AC \cos A$$

и, таким образом,

$$AB = AC \cos A + BC \cos B < 2AC \cos A,$$

или

$$c < 2AC \cos A.$$

Отсюда

$$\frac{bc}{3 \cos A} < \frac{2AC^2}{3} < AC^2$$

и

$$\sqrt{\frac{bc}{3 \cos A}} < AC.$$

Учитывая соотношение (4), где  $2\theta = -A$ , получаем, наконец, что

$$AB_1 < AC. \quad (6)$$

Отсюда, поскольку  $AB_1 = AC_1$  — см. соотношение (4) — и  $AC < AB$ , находим

$$AC_1 < AB. \quad (7)$$

Так как

$$AB \cos A < AC,$$

то тем более

$$AB \cos A < \frac{4}{3} AC,$$

откуда

$$\frac{AB}{4} < \frac{AC}{3 \cos A}.$$

Умножая обе части неравенства на  $AB$ , получаем

$$\frac{AB^2}{4} < \frac{AC \cdot AB}{3 \cos A} = \frac{bc}{3 \cos A}.$$

Отсюда

$$AN = \frac{AB}{2} < \sqrt{\frac{bc}{3 \cos A}} = AC_1,$$

то есть

$$AN = AC_1, \quad (8)$$

а поскольку

$$AC_1 = AB_2 \quad \text{и} \quad AM = \frac{AC}{2} < \frac{AB}{2} = AN,$$

то

$$AM = AB_1. \quad (9)$$

Из неравенств (9) и (6) следует, что  $AM < AB_1 < AC$ , а из неравенств (8) и (7) — что  $AN < AC_1 < AB$ . Таким образом, точка  $B_1$  лежит между точками  $M$  и  $C$ , а точка  $C_1$  — между точками  $N$  и  $B$ .

Введем теперь новую систему координат  $\xi A \eta$  (ось  $\xi$  выбрана так, чтобы сторона  $AC$  треугольника лежала на ней). Тогда

$$\xi = r \cos \left( \theta + \frac{A}{2} \right) = \sqrt{\frac{bc}{3} \cdot \frac{\cos^2 \left( \theta + \frac{A}{2} \right)}{\cos 2\theta}} = \sqrt{\frac{bc}{3}} u,$$

где

$$u = u(\theta) = \frac{\cos^2 \left( \theta + \frac{A}{2} \right)}{\cos 2\theta},$$

и

$$\eta = r \sin \left( \theta + \frac{A}{2} \right) = \sqrt{\frac{bc}{3} \cdot \frac{\sin^2 \left( \theta + \frac{A}{2} \right)}{\cos 2\theta}} = \sqrt{\frac{bc}{3}} v,$$

где

$$v = v(\theta) = \frac{\sin^2 \left( \theta + \frac{A}{2} \right)}{\cos 2\theta}.$$

Дифференцируя  $u(\theta)$  и  $v(\theta)$  по  $\theta$ , получаем

$$\frac{du}{d\theta} = \frac{-2 \sin \left( \frac{A}{2} - \theta \right) \cos \left( \frac{A}{2} + \theta \right)}{\cos^2 2\theta},$$

$$\frac{dv}{d\theta} = \frac{2 \sin \left( \frac{A}{2} + \theta \right) \cos \left( \frac{A}{2} - \theta \right)}{\cos^2 2\theta}.$$

Итак, в секторе  $-A/2 < \theta < A/2$ , где  $0 < A < \pi/2$ ,  $du/d\theta < 0$  и  $dv/d\theta > 0$ . Следовательно, длина отрезка  $AP_2 = \xi(\theta)$  при  $\theta$ , пробегающем значения от  $-A/2$  до  $A/2$ , убывает, а длина отрезка  $PP_2 = \eta(\theta)$  возрастает. Отсюда мы заключаем, что площадь  $F$  четырехугольника  $CP_2PP_1$  есть возрастающая функция переменной  $\theta$ .

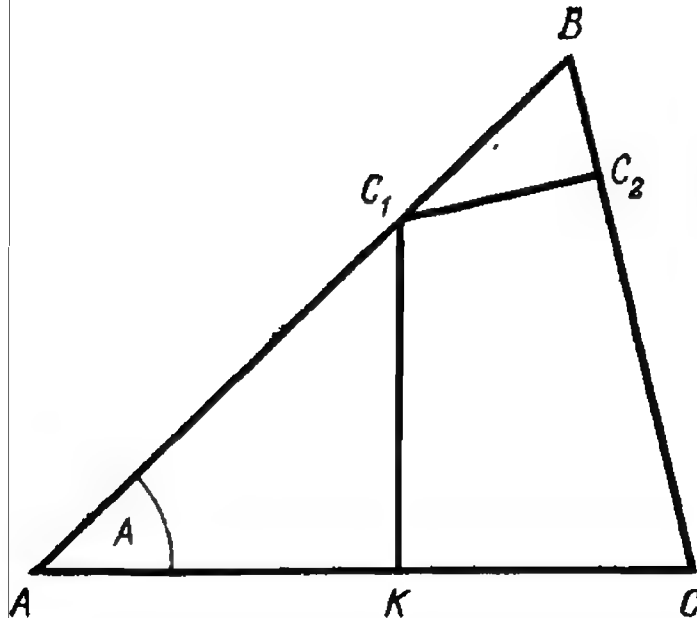


Рис. 32.

в интервале  $[-A/2, A/2]$ . В то же время площадь четырехугольника  $CP_2PP_1$  в том же интервале является непрерывной функцией переменной  $\Theta$  и в соответствии с известным свойством непрерывной функции, определенной на замкнутом интервале, принимает все значения, заключенные между ее наименьшим

$$F\left(-\frac{A}{2}\right) = S_{CB_1B} < \frac{1}{4} S_{ABC}$$

и наибольшим

$$F\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{2}{3} S_{ABC} - S_{BC_1C_2}$$

значением. Если  $P$  совпадает с  $C_1$  (рис. 32), то

$$S_{KC_1A} = \frac{1}{2} AC_1^2 \sin A \cos A = \frac{1}{2} \frac{bc}{3 \cos a} \sin A \cos A = \frac{1}{3} S_{ABC}.$$

Отсюда следует, что

$$F\left(\frac{A}{2}\right) > \frac{2}{3} S_{ABC} - \frac{1}{4} S_{ABC} = \frac{5}{12} S_{ABC} > \frac{1}{3} S_{ABC}.$$

Таким образом, при некотором значении  $\Theta^*$  ( $-A/2 < \Theta^* < A/2$ ) площадь четырехугольника  $CP_2PP_1$  равна  $1/3 S_{ABC}$ , что и требовалось доказать.

**26.** Нетрудно доказать\*, что для каждого ограниченного множества точек на плоскости существует ровно одна наименьшая окружность, содержащая это множество. Если множество замкнуто, то на самой окружности лежат либо две его точки, совпадающие с противоположными концами одного из ее диаметров, либо три его точки, расположенные в вершинах остроугольного треугольника.

Отсюда, в частности, следует

**Лемма 1.** Радиус наименьшей окружности, содержащей три точки  $A, B, C$  плоскости, равен:

а) половине наибольшей стороны треугольника  $ABC$ , если треугольник  $ABC$  тупоугольный;

б) радиусу окружности, описанной вокруг треугольника  $ABC$ , во всех остальных случаях.

Случаи а) и б) не исключают один другого, поскольку для прямоугольного треугольника радиус описанной окружности равен половине гипотенузы.

Обозначим радиус наименьшей окружности, содержащей рассматриваемое множество  $S$  точек плоскости, через  $r(S)$ .

\* См. И. М. Яглом и В. Г. Болтянский, Выпуклые фигуры, Гостехиздат, М.—Л., 1951 (серия «Библиотека математического кружка», вып. 4), стр. 75—76 и 133—134. — Прим. ред.

Л е м м а 2. Если расстояния между точками  $A', B', C'$  меньше соответствующих расстояний между точками  $A, B, C$ , то  $r(A', B', C') < r(A, B, C)$ .

Доказательство. Достаточно рассмотреть три случая:

1. Треугольник  $A'B'C'$  тупоугольный. Тогда по лемме 1

$$(A', B', C') = \max \left( \frac{A'B'}{2}, \frac{B'C'}{2}, \frac{C'A'}{2} \right) < \\ < \max \left( \frac{AB}{2}, \frac{BC}{2}, \frac{CA}{2} \right) \leq r(A, B, C).$$

2. Треугольники  $ABC$  и  $A'B'C'$  не тупоугольные. Поскольку суммы внутренних углов треугольников  $A'B'C'$  и  $ABC$  одинаковы, то по крайней мере один угол треугольника  $A'B'C'$  не меньше соответствующего угла треугольника  $ABC$ . Пусть, например,  $\angle A' \geq \angle A$ . По лемме 1 радиусы наименьших окружностей, содержащих вершины треугольников  $A'B'C'$  и  $ABC$ , совпадают с радиусами описанных окружностей. Воспользовавшись теоремой синусов ( $BC > B'C'$ ,  $\sin A \leq \sin A'$ ), получим

$$r(A', B', C') = \frac{B'C'}{2 \sin A'} < \frac{BC}{2 \sin A} = r(A, B, C).$$

3. Лишь треугольник  $A'B'C'$  не тупоугольный. Пусть  $AB$  — наибольшая из сторон треугольника  $ABC$ . Поскольку треугольник  $ABC$  тупоугольный, то  $AB^2 > BC^2 + CA^2$ . Рассмотрим вспомогательный прямоугольный треугольник  $A_1B_1C_1$  со сторонами  $B_1C_1 = BC$ ,  $C_1A_1 = CA$  и  $A_1B_1 = \sqrt{BC^2 + CA^2}$ .

Из неравенства  $A_1B_1 < AB$  и леммы 1 получаем

$$r(A_1, B_1, C_1) = \frac{A_1B_1}{2} < \frac{AB}{2} = r(A, B, C). \quad (*)$$

Треугольник  $A'B'C'$  не тупоугольный, следовательно,  $A'B'^2 \leq B'C'^2 + C'A'^2$ . В силу исходного предположения (то есть неравенств  $B'C' < BC$  и  $C'A' < CA$ ) и по построению вспомогательного треугольника  $A_1B_1C_1$  его стороны удовлетворяют неравенствам  $A'B' < A_1B_1$ ,  $B'C' < B_1C_1$  и  $C'A' < C_1A_1$ . К треугольникам  $A'B'C'$  и  $A_1B_1C_1$  применим уже доказанный случай 2 нашей леммы. Таким образом,

$$r(A', B', C') < r(A_1, B_1, C_1),$$

откуда, воспользовавшись неравенством (\*), получим:

$$r(A', B', C') < r(A, B, C).$$

Итак, лемма 2 доказана.

Л е м м а 3. Если любые 3 точки некоторого множества точек  $S$  можно заключить в окружность радиуса  $r$ , то и все множество  $S$  можно заключить в окружность радиуса  $r$ .



Лемма 3 вытекает из следующей теоремы Хелли\*:

*Если на плоскости задано конечное или бесконечное множество выпуклых ограниченных фигур, из которых каждые три имеют общую точку, то существует точка, принадлежащая одновременно всем фигурам.*

**Доказательство.** Рассмотрим на плоскости семейство  $K$  всех окружностей радиуса  $r$  с центрами в точках множества  $S$ . Поскольку любые три точки множества  $S$  можно накрыть кругом радиуса  $r$ , то любые три окружности семейства  $K$  содержат общую точку. Но тогда из теоремы Хелли следует, что существует точка  $X$ , принадлежащая всем окружностям семейства  $K$ . Окружность радиуса  $r$  с центром в точке  $X$  содержит внутри себя все множество  $S$ , что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь два множества  $S = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  и  $T = \{B_1, B_2, \dots, B_n\}$  точек плоскости, таких, что  $A_i A_j > B_i B_j$  при  $i, j = 1, \dots, n; i \neq j$ .

При  $n = 2$  неравенство  $r(T) < r(S)$  очевидно.

Предположим, что  $n \geq 3$ . По лемме 3 радиус наименьшей окружности, содержащей внутри себя множество  $T$ , будет наибольшим из чисел  $r(B_i, B_j, B_k)$ , где  $i, j, k = 1, 2, \dots, n$ . Пусть, например  $r(T) = r(B_{i_0}, B_{j_0}, B_{k_0})$ .

По лемме 2

$$r(B_{i_0}, B_{j_0}, B_{k_0}) < r(A_{i_0}, A_{j_0}, A_{k_0}),$$

откуда в силу очевидного неравенства

$$r(A_{i_0}, A_{j_0}, A_{k_0}) \leq r(S)$$

получаем

$$r(T) < r(S),$$

что и требовалось доказать

*Примечание.* Аналогичным образом можно доказать и следующую теорему: если замкнутое и ограниченное множество  $S$  точек плоскости под действием некоторого сжимающего преобразования переходит в множество  $T$ , то  $r(T) < r(S)$ .

27. Центр тяжести каждой из сторон треугольника  $PQR$  находится в ее геометрическом центре, то есть совпадает с одной из вершин малого треугольника  $ABC$  (рис. 33). Следовательно, центр тяжести всего проволочного треугольника  $PQR$  совпадает с центром тяжести системы трех материальных точек  $A$ ,  $B$  и  $C$ , массы которых пропорциональны длинам сторон  $PQ$ ,  $QR$  и  $RP$ .

Центр тяжести  $D$  системы двух материальных точек  $A$  и  $B$  делит отрезок  $AB$  в отношении, обратном отношению масс, сосредоточенных в точках  $A$  и  $B$ :

$$\frac{AD}{DB} = \frac{QR}{PQ} = \frac{AC}{CB}.$$

---

\* См. стр. 31 указанной в примечании на стр. 138 книги И. М. Яглома и В. Г. Болтянского. Оттуда же заимствовано и приведенное ниже доказательство. — Прим. перев.

Известно, что прямая, проходящая через вершину треугольника и делящая противоположную сторону на отрезки, пропорциональные длинам двух остальных сторон, есть биссектриса угла при вершине. Следовательно, центр тяжести системы материальных точек  $A$ ,  $B$  и  $C$ , который одновременно является центром тяжести системы материальных точек  $C$  и  $D$ , лежит на биссектрисе  $CD$  угла  $C$ . По аналогичной причине центр тяжести трех материальных точек  $A$ ,  $B$  и  $C$  должен лежать и на биссектрисах  $AF$  и  $BE$  двух других углов малого треугольника.

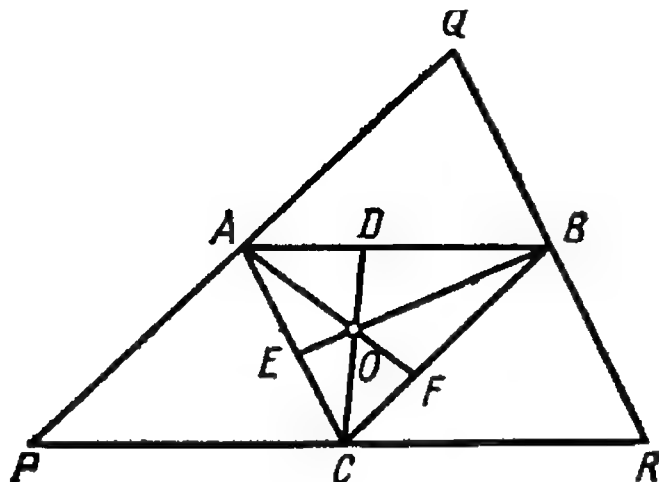


Рис. 33.

*Примечание.* Поскольку стороны треугольника  $ABC$  пропорциональны сторонам треугольника  $PQR$ , а массы, помещенные в точках  $A$ ,  $B$  и  $C$ , пропорциональны длинам сторон  $QR$ ,  $PR$  и  $PQ$ , можно воспользоваться утверждением, которое требовалось доказать в задаче 23: центр тяжести системы материальных точек  $A$ ,  $B$  и  $C$  совпадает с центром окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ . Утверждение рассматриваемой задачи сразу же следует из утверждения задачи 23.

28\*. Необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять числа  $b_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ), выражаются системой неравенств  $\sum_{i \neq k} b_i > b_k$  для  $k = 1, 2, \dots, n$  или эквивалентным неравенством  $\sum_{k=1}^n b_k > 2b_{\max}$ , где  $b_{\max}$  означает наибольшую из сторон  $n$ -угольника  $b_1, b_2, \dots, b_n$ .

29. Ответ на вопрос задачи отрицателен: максимальная площадь  $n$ -угольника со сторонами  $b_k$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) не зависит от последовательности сторон. Действительно, как видно из рис. 34, перестановка сторон  $b_i$  и  $b_{i+1}$  не меняет площадь многоугольника. Но с помощью таких транспозиций (перестановок смежных сторон) мы можем осуществить любую перестановку сторон  $b_1, b_2, \dots, b_n$ .



Рис. 34.

30. Полное доказательство утверждения задачи см. в книге Д. А. Крыжановского «Изопериметры» (М., Физматгиз, 1959, стр. 52—55).

31. См. решение следующей задачи.

\* Полное решение задачи см. в книге: Д. А. Крыжановский, *Изопериметры*, М., Физматгиз, 1959. — *Прим. перев.*

32. Задачи 31 и 32 образуют единое целое, поэтому их решения мы также объединяем и рассматриваем совместно.

Докажем прежде всего, что  $n$  окружностей могут разделить плоскость не более чем на  $n(n-1) + 2$  частей.

Доказательство будем проводить по индукции. При  $n = 1$  утверждение истинно: одна окружность делит плоскость на 2 части.

Пусть  $P_n$  означает максимальное число частей, на которые  $n$  окружностей делят плоскость, и пусть  $P_n \leq n(n-1) + 2$ .

Проведем теперь  $(n+1)$ -ю окружность. Она может пересекать остальные окружности в  $s$  точках, где  $0 \leq s \leq 2n$ . При  $s > 0$  эти  $s$  точек разбивают новую окружность на  $s$  дуг. К каждой дуге прилегают 2 части плоскости. Следовательно, каждая такая дуга порождает самое большее одну новую часть, что при максимальном значении  $s = 2n$  дает  $2n$  новых частей. Пользуясь предположением индукции, получаем

$$P_{n+1} \leq P_n + 2n \leq n(n-1) + 2 + 2n = n^2 + n + 2 = (n+1)n + 2.$$

На этом первая часть доказательства заканчивается.

Из доказанного следует, что 4 окружности могут разделить плоскость не более чем на 14 частей. Следовательно, 4 окружности при любом расположении не могут разделить плоскость на 16 частей.

Докажем теперь, что  $n$  окружностей одного и того же радиуса можно расположить на плоскости так, что они разделят ее на  $n(n-1) + 2$  части. Для этого рассмотрим единичный отрезок  $AB$ . Разделим его точками  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_{n-2}$  на  $n-1$  равную часть. С центрами в точках  $A, A_1, \dots, A_{n-2}, B$  и одинаковыми радиусами, равными  $1/2$ , построим  $n$  окружностей. Мы получим систему из  $n$  окружностей, любые две из которых пересекаются, поскольку расстояние между их центрами меньше суммы их радиусов. Нетрудно доказать, что ни в одной точке не пересекаются более двух окружностей. Следовательно, в построенной системе  $n$  окружностей полное число точек, в которых пересекаются две окружности, равно  $2C_n^2 =$   
 $= n(n-1)$ , причем на каждой окружности лежат  $2(n-1)$  таких точек. Эти точки пересечения делят каждую окружность на  $2(n-1)$  дуг, а всю систему окружностей — на  $2n(n-1)$  дуг. Поскольку по формуле Эйлера число дуг равно уменьшенной на 2 сумме числа точек пересечения и числа частей плоскости, то искомое число частей равно

$$2n(n-1) - n(n-1) + 2 = n(n-1) + 2,$$

что и требовалось доказать.

33. Поскольку для каждого невыпуклого многоугольника можно построить выпуклый многоугольник с теми же сторонами, но с большей площадью, утверждение задачи достаточно доказать для выпуклого шестиугольника.

Известно\*, что из всех выпуклых многоугольников с одним и тем же периметром правильный имеет наибольшую площадь. Таким

---

\* См. И. М. Яглом и В. Г. Болтянский, Выпуклые фигуры, М.—Л., Гостехиздат, 1951. (Серия «Библиотека математического кружка», вып. 4). Задача 64 (стр. 73) и ее решение (стр. 240—244) — *Прим. перев.*

образом, если  $S$  — площадь произвольного выпуклого шестиугольника со сторонами, меньшими 1, то  $S < \frac{3}{2}\sqrt{3}$ , где в правой части неравенства стоит площадь правильного выпуклого шестиугольника со стороной, равной 1. Нетрудно проверить, что  $\frac{3}{2}\sqrt{3} < \frac{3}{2} \cdot 1,723 = 2,598 < 2,6$ . Следовательно,  $S < 2,6$ , что и требовалось доказать.

34. Прежде всего заметим, что овал, внутри которого находятся  $n$  данных точек, в действительности никакой роли не играет, поскольку любой конечный набор точек на плоскости всегда можно заключить внутрь некоторого овала. Если  $n$  данных точек рассматривать без ограничивающего их овала, то отрезки ломаных, имевших ранее с овалом общие точки, заменятся лучами.

Примем для краткости следующие обозначения. Пусть  $U1$  — та часть условий задачи, в которой говорится о том, что внутри каждого многоугольного участка находится лишь одна из  $n$  данных точек, а  $U2$  — та часть условий задачи, в которой говорится, что владельцу любого участка до «своей» точки ближе, чем до «чужой».

Прежде чем приступить к решению задачи, рассмотрим два частных случая:

1)  $n = 1$ . Тогда  $L(1) = 0$ . Действительно, если бы значение  $L$  при  $n = 1$  было больше нуля, то нарушалось бы условие  $U1$ .

2)  $n = 2$ . Тогда  $L(2) = 1$ . Действительно, изгородь, проходящая через середину отрезка  $P_1P_2$  перпендикулярно ему, удовлетворяет условию  $U2$  (мы предполагаем, что владельцы участков — люди солидные и через изгороди не лазают), поэтому  $L(2) \geq 1$ . Возвести еще одну изгородь, не нарушив при этом ни  $U1$ , ни  $U2$ , невозможно, следовательно,  $L(2) = 1$ .

Докажем теперь, что границы между участками обладают следующими свойствами:

А. Звенья ломаных (ими могут быть как конечные отрезки, так и полубесконечные лучи) лежат на прямых, проходящих через середины отрезков  $P_iP_k$  (где  $i, k = 1, 2, \dots, n$ , причем  $i \neq k$ ), и образуют с отрезками  $P_iP_k$  прямые углы.

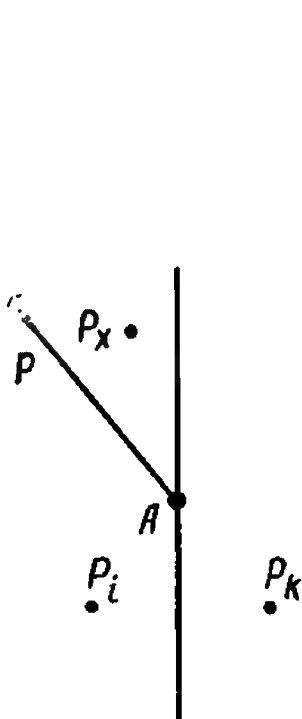


Рис. 35.

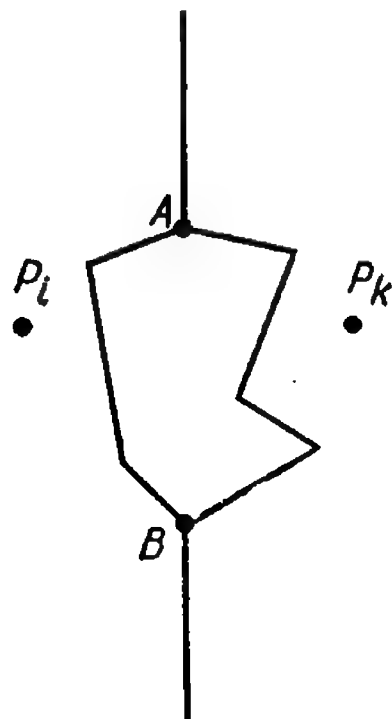


Рис. 36.

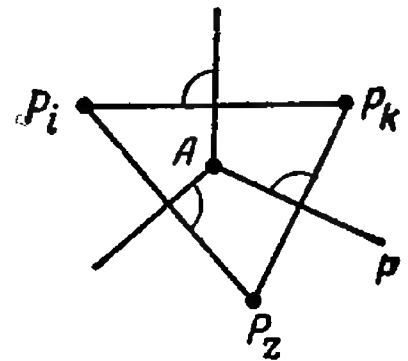


Рис. 37.

Б. На прямой, проходящей через середину любого из отрезков  $P_i P_k$  и образующей с ним прямой угол, может лежать лишь одно звено сети ломаных.

*Докажем свойство А.* Предположим, что некоторый прямолинейный участок изгороди, содержащей внутри себя произвольную точку  $P_i$ , не лежит ни на одной из прямых, проходящих через середины отрезков  $P_i P_k$  (где  $i, k = 1, 2, \dots, n$ , причем  $i \neq k$ ) и образующих с ними прямые углы. Если за таким участком изгороди находилась бы какая-то из заданных точек  $P$ , то, очевидно, было бы нарушено условие У2. Если бы за таким отрезком забора не было ни одной точки  $P$ , то нарушенным оказалось бы условие У1. Таким образом, свойство А доказано.

*Докажем свойство Б.* Предположим, что на прямой, проходящей через середину отрезка  $P_i P_k$  и образующей с ним прямой угол, лежат по крайней мере два звена сети ломаных. Поскольку эти звенья расположены на одной прямой, их можно разделить либо вершиной (рис. 35), либо некоторой сетью ломаных (рис. 36).

В первом случае из вершины  $A$  должно выходить по крайней мере еще одно звено  $p$  сети ломаных. Следовательно, к вершине  $A$  примыкает участок, содержащий некоторую точку  $P_x$ , и если  $s$  — прямая, проходящая через середину отрезка  $P_i P_k$  и образующая с  $P_i P_k$  прямой угол, то она не может одновременно проходить через середину отрезка  $P_x P_k$ , где  $x \neq i$ , и образовывать с  $P_x P_k$  прямой угол. В то же время, если бы на одном из участков, примыкающих к вершине  $A$ , не было ни одной из заданных точек  $P$ , то условие У1 было бы нарушено.

Во втором случае предположим, что из вершины  $A$  выходит некоторое звено сети ломаных  $p$  (рис. 37). За этим звеном должен лежать участок, содержащий одну из заданных точек  $P$ , которую мы обозначим  $P_z$ . Точка  $P_z$  однозначно определяет положение точек  $P_i, P_k$  и, следовательно, другое звено сети ломаных, также выходящее из  $A$ . Проводя аналогичные рассуждения для точки  $B$ , находим точки  $P'_z, P'_i, P'_k$ , причем  $P'_i = P_i, P'_k = P_k$ , но  $P'_z \neq P_z$ . Прямые, проходящие через середины отрезков  $P'_z P_i$  и  $P'_z P_k$  и образующие с ними прямые углы, должны пересекаться в точке  $B$ , что невозможно, поскольку оси симметрии двух отрезков, имеющих общее начало, либо параллельны, либо пересекаются внутри выпуклого угла, образованного этими отрезками. Аналогичные рассуждения приводят к противоречию и в том случае, если к узлу сети ломаных примыкает более трех участков (рис. 38). Таким образом, свойство Б доказано.

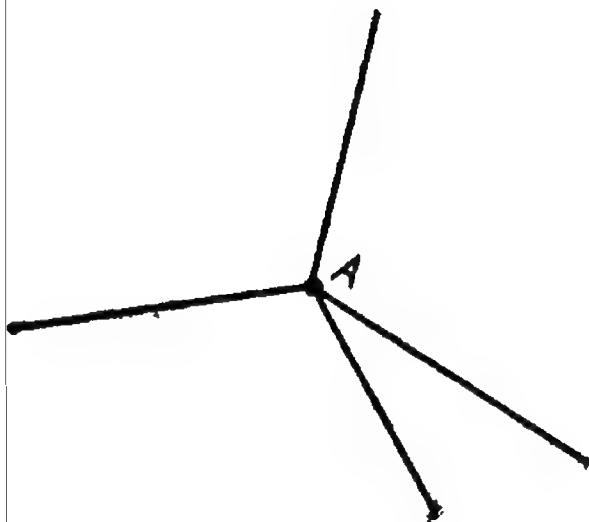


Рис. 38.

Рассмотрим теперь произвольную конфигурацию точек  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , огражденных в соответствии с условиями задачи. Изгородь образует (в плане) некоторый плоский граф  $G$ . Построим граф  $G^*$ , двойственный графу  $G$ , следующим способом. В каждом участке (в том числе и в неограниченных участках) выберем произвольную

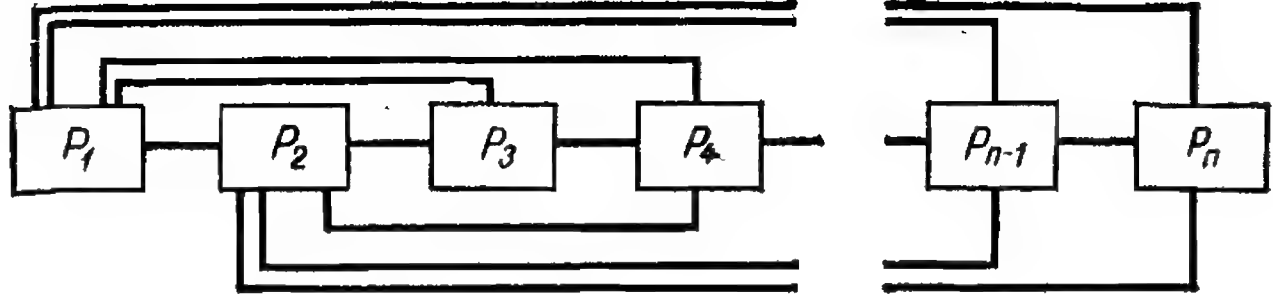


Рис. 39.

точку, например, точку  $P$ . Ясно, что таких точек будет ровно  $n$ . Если участки, которым принадлежат точки  $P_i$  и  $P_k$ , смежные, то соединим их (проведем ребро графа, связывающее вершины  $P_i$  и  $P_k$ ). По свойству  $B$  любую пару точек  $P$  можно соединить не более чем одним ребром. Построенный граф  $G^*$ , так же как и граф  $G$ , будет плоским, а число его ребер равно числу звеньев сети ломаных (то есть числу ребер в графе  $G$ ). Возникает вопрос: чему равно максимальное число ребер в плоском графе с  $n$  вершинами, если ни одна пара вершин не связана более чем одним ребром? Пользуясь рис. 39, нетрудно вычислить, что при  $n \geq 3$  граф, обладающий требуемыми свойствами, может иметь не более  $3(n-2)$  ребер. Поскольку результат вычислений не зависит от способа изображения графа, а определяется лишь его топологическими свойствами, мы получаем для  $L(n)$  следующее неравенство:

$$L(n) \leq 3(n-2).$$

Докажем, что при  $n \geq 3$  неравенство в действительности переходит в равенство  $L(n) = 3(n-2)$ . Для этого достаточно доказать, что при любом  $n \geq 3$  найдется такая конфигурация точек, для которой число звеньев в сети ломаных равно  $3(n-2)$ . Приведем примеры таких конфигураций.

Перенумеруем шесть лучей, выходящих из общей вершины  $O$  и делящих плоскость на шесть примыкающих друг к другу частей, так, как показано на рис. 40. ( $P(m, a)$  означает точку  $P$ , лежащую на луче  $m$  и отстоящую на расстояние  $a$  от вершины  $O$ .) При  $n \equiv 0 \pmod{3}$  нужную нам конфигурацию образуют точки

$$\begin{cases} P_1(1, a), P_2(2, a), P_3(3, a), \\ P_4(4, 3a), P_5(5, 3a), P_6(6, 3a), \\ P_7(1, 9a), P_8(2, 9a), P_9(3, 9a), \\ P_{10}(4, 27a), P_{11}(5, 27a), P_{12}(6, 27a), \\ P_{13}(1, 81a), \dots \end{cases} \quad (1)$$

При  $n \equiv 1 \pmod{3}$  точка  $P_n$  располагается в центре звезды. Для однообразия записи будем считать, что координаты точки  $P_n$  имеют вид  $(x+1, 0)$ , где  $x$  — номер луча, которому принадлежит точка  $P_{n-1}$ .

При  $n \equiv 2 \pmod{3}$  точка  $P_{n-1}$  расположена в центре звезды, а точка  $P_n$  — в соответствии с правилом (1).

Поясним сказанное на рис. 41. Предположим, что  $n > 12$ . В случае  $n \equiv 0 \pmod{3}$  звенья ломаной образуют (если считать от центра

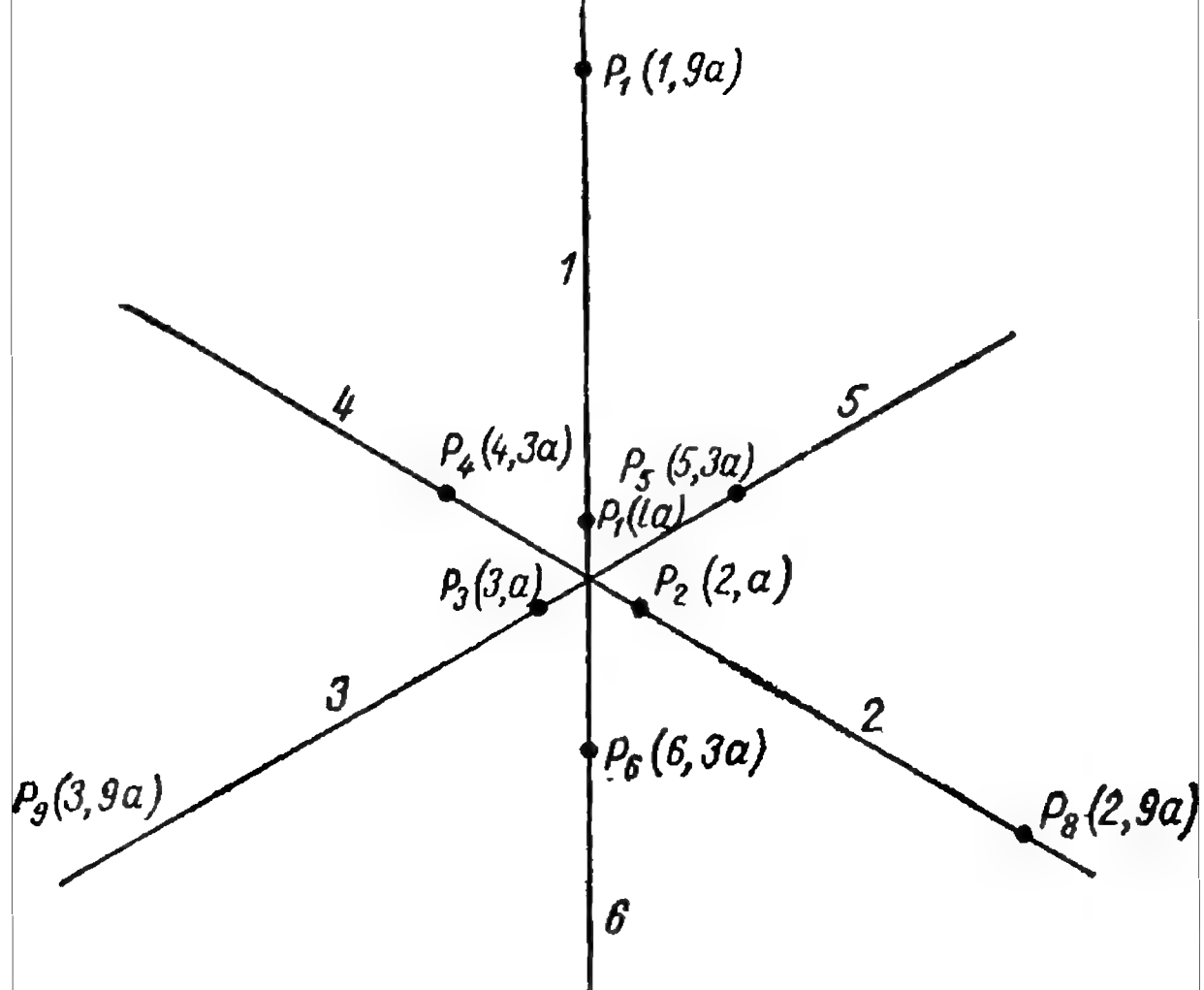


Рис. 40.

11

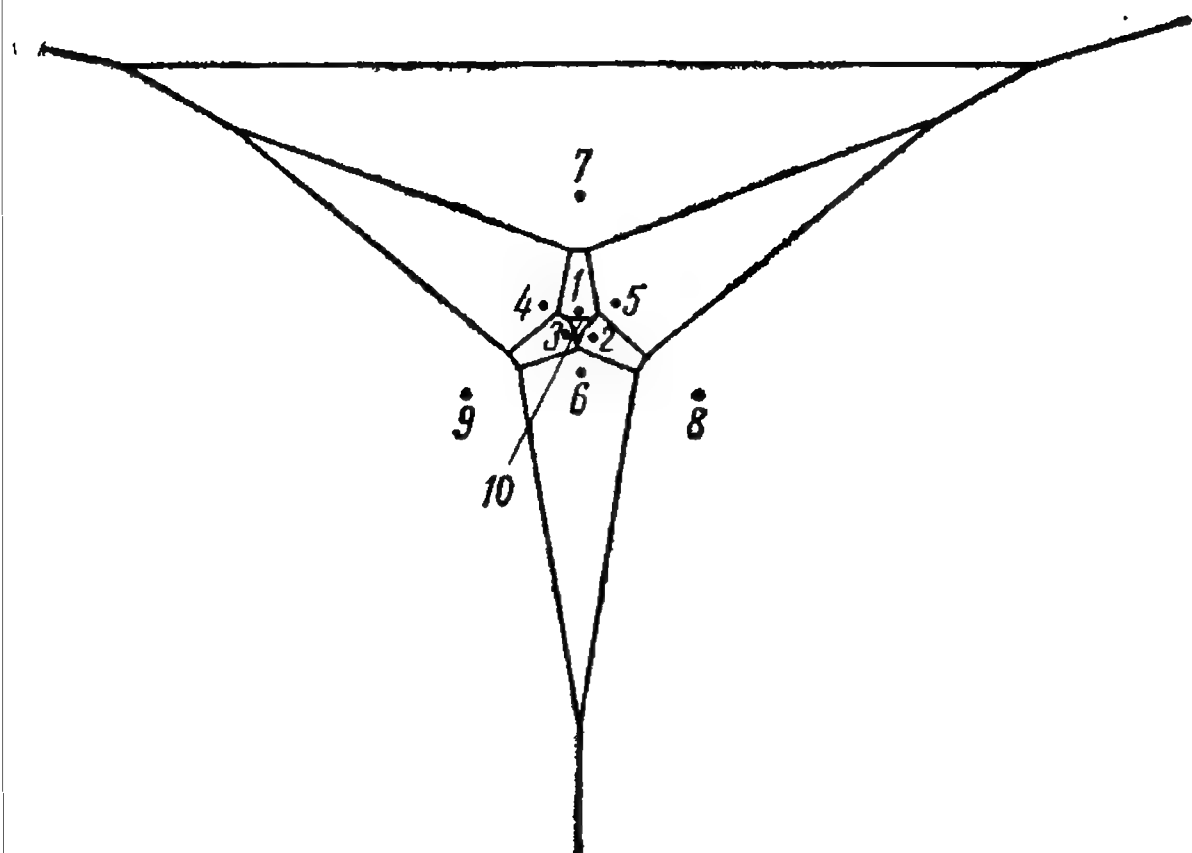


Рис. 41.



звезды) три пятиугольника, затем еще три пятиугольника, подобных первым трем (коэффициент подобия равен 3),  $(n - 12)$  подобных шестиугольников (с коэффициентами подобия 3, 9, 27 и т. д.), затем снова три конечных пятиугольника и, наконец, три неограниченных пятиугольника. Таким образом, число  $N$  звеньев сети ломаных в данной конфигурации составляет

$$N = \frac{1}{2} [3 \cdot 5 + 3 \cdot 5 + 6(n - 12) + 3 \cdot 5 + 3 \cdot 5] = 3(n - 2).$$

Фигуры, которые получаются при  $n \equiv 1 \pmod{3}$  и  $n \equiv 2 \pmod{3}$ , не требуют отдельного описания, поскольку, как нетрудно видеть, добавление одной новой точки в центре звезды вызывает изменения лишь в центре фигуры: ближайшие к центру пятиугольники переходят в шестиугольники, и вблизи центра возникает равносторонний треугольник. Таким образом, при добавлении одной точки в центре звезды число звеньев сети ломаных возрастает на 3. Добавление следующей точки также приводит к изменению лишь центральной части фигуры, связанному с увеличением числа звеньев сети на 3 (подробности перестройки фигуры ясны из сравнения рис. 41, 42 и 43). Отрезки, соединяющие заданные точки, можно разбить на ряд семейств:

$$P_1P_4 \parallel P_7P_{10} \parallel P_{13}P_{16} \text{ и т. д.},$$

$$P_4P_7 \parallel P_{10}P_{13} \parallel P_{16}P_{19} \text{ и т. д.},$$

а также аналогичные семейства отрезков, концы которых лежат на остальных парах лучей. Из выписанных в явном виде семейств следует подобие участков, о котором говорилось при описании конфигурации для  $n \equiv 0 \pmod{3}$ , а также осуществимость построения

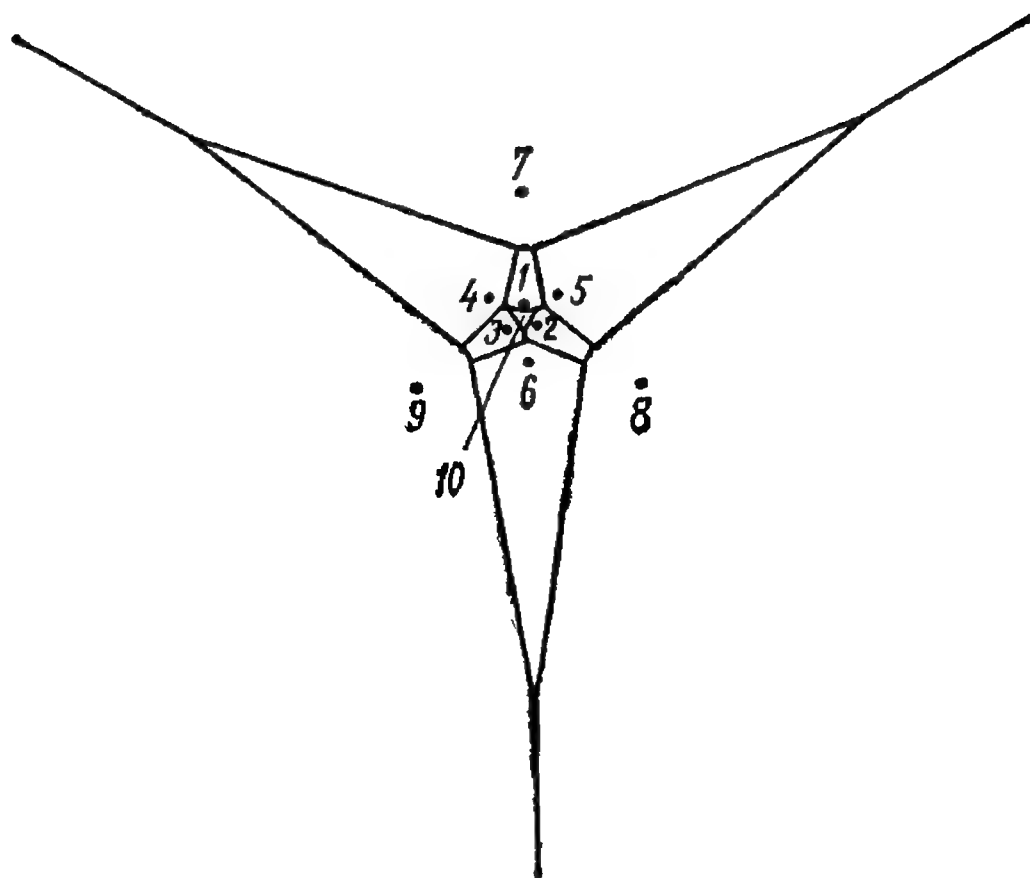


Рис 42.

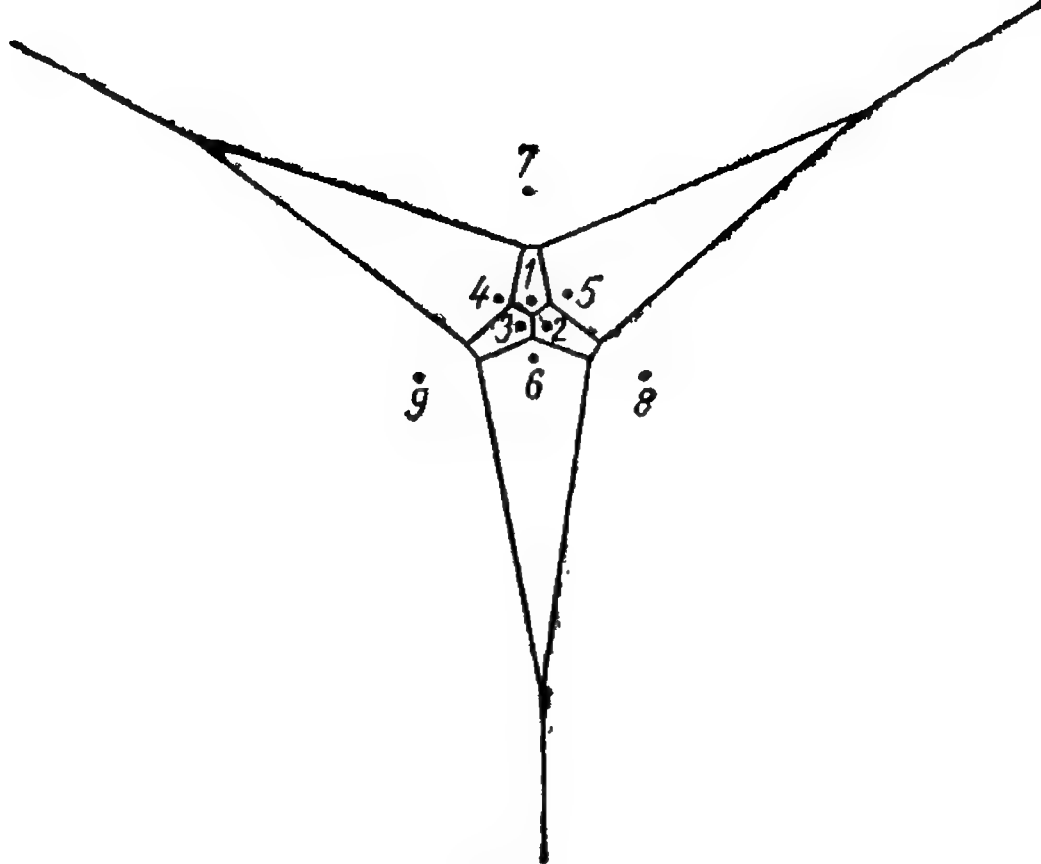


Рис. 43.

фигуры. Случаи  $n \leq 12$  без труда допускают непосредственное рассмотрение.

Итак, мы доказали, что  $L(1) = 0$ ,  $L(2) = 1$ ,  $L(n) = 3(n - 2)$  при  $n \geq 3$ .

35. 23 точки, о которых говорится в условии задачи, делят окружность на 23 части. Пусть  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{23}$  — возникающие при этом дуги, взятые в том порядке, в котором они встречаются при обходе окружности. (За начало отсчета можно принять любую из дуг. В ходе решения нумерация дуг остается неизменной.)

Докажем истинность утверждения I.

На окружности  $K$  можно разместить 7 дуг длиной 7 см каждая. По крайней мере одна из дуг содержит менее 4 точек множества  $Z$ , ибо в противном случае число точек в  $Z$  было бы больше или равно 28, что противоречит условию задачи. Обозначим через  $AB$  дугу, содержащую менее 4 точек множества  $Z$ . Если дуга  $AB$  содержит ровно 3 точки множества  $Z$ , то утверждение I доказано.

Если же дуга  $AB$  содержит менее 3 точек (то есть если число точек множества  $Z$ , принадлежащих дуге  $AB$ , равно 0 или 2), то будем сдвигать ее по окружности так, чтобы конец  $A$  по очереди совмещался с точками множества  $Z$ . Мы утверждаем, что в момент, когда  $A$  совпадет с одной из этих точек, дуга  $AB$  будет содержать ровно 3 точки множества  $Z$ . Действительно, в противном случае для  $k = 1, 2, 3, \dots, 23$  выполнялось бы неравенство

$$a_k + a_{k+1} > 7$$

(под  $a_{24}$  мы понимаем дугу  $a_1$ ), откуда

$$\sum_{k=1}^{23} (a_k + a_{k+1}) > 23 \cdot 7.$$

Однако поскольку

$$\sum_{k=1}^{23} a_k = 50,$$

то из последнего неравенства следовало бы неравенство

$$2 \cdot 50 > 23 \cdot 7,$$

что невозможно.

Докажем теперь истинность утверждения II.

Для этого требуется доказать, что для некоторого  $k$  ( $1 \leq k \leq 23$ ) одновременно выполняются неравенства

$$a_k + a_{k+1} + a_{k+2} < 7 \quad \text{и} \quad a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} > 7,$$

где

$$a_{24} = a_1, \quad a_{25} = a_2, \quad a_{26} = a_3.$$

Действительно, в противном случае

$$\sum_{k=1}^{23} (a_k + a_{k+1} + a_{k+2}) \geq 23 \cdot 7$$

и

$$\sum_{k=1}^{23} (a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3}) \leq 23 \cdot 7,$$

или

$$3 \cdot 50 \geq 23 \cdot 7$$

и

$$4 \cdot 50 \leq 23,$$

что невозможно.

Таким образом, оба утверждения доказаны.

**36.** Докажем прежде всего, что если вершины двух равнобедренных треугольников, имеющих равные основания и вершины, обращенные в одну и ту же сторону (например, «вверх»), совпадают с вершинами выпуклого шестиугольника, то  $\alpha > \beta$ , где  $\alpha$  — угол при основании того треугольника, чье основание расположено «ниже», а  $\beta$  — угол при основании другого треугольника.

Из выпуклости шестиугольника, образованного вершинами треугольников, заключаем, что основания треугольников не лежат на одной прямой, а вершина одного треугольника не совпадает с вершиной другого. Докажем, что неравенство  $\alpha > \beta$  должно выполняться в каждом из двух возможных случаев относительного расположения треугольников (треугольники могут либо перекрываться, либо не перекрываться).

Действительно, в первом случае (рис. 44), поскольку  $\angle C'DC = 180^\circ - (\angle DEB' + \angle \beta) = \alpha - \beta$ , то при  $\alpha \leq \beta$  должно было бы выполняться неравенство  $\angle C'DC \leq 0$ . Иначе говоря, вершина  $C$  должна была бы лежать на треугольнике  $A'B'C'$ .

Во втором случае (рис. 45)  $\angle B'DE = 180^\circ - (\angle B'ED + \angle DB'E) = \alpha - \beta$ . Следовательно, при  $\alpha \leq \beta$  продолжение стороны  $BC$  пересекало бы треугольник  $A'B'C'$  и шестиугольник  $A'C'B'SBA$  не был бы выпуклым.

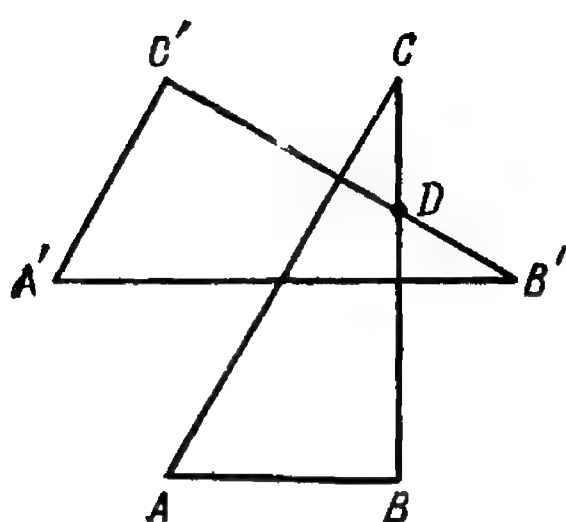


Рис. 44.

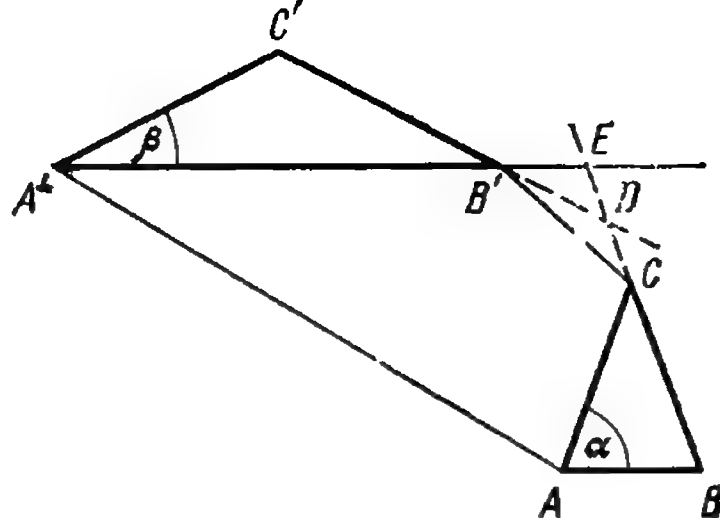


Рис. 45.

Предположим теперь, что существует выпуклый многоугольник, о котором говорится в условиях задачи. Рассмотрим лишь те из его вершин, которые совпадают с концами двух параллельных крестов. Концы крестов служат вершинами выпуклого восьмиугольника. Отбросив «нижние» концы крестов, мы получили бы два равнобедренных треугольника, и, по доказанному, углы при их основаниях удовлетворяли бы неравенству  $\beta < \alpha$ . Отбросив два «верхних» конца крестов, мы снова получили бы два равнобедренных треугольника и, также по доказанному, пришли бы к противоположному неравенству  $\alpha < \beta$ . Полученное противоречие доказывает, что все концы двух параллельных крестов не могут совпадать с вершинами выпуклого многоугольника.

37. Поскольку площадь круга равна площади 10 элементарных квадратов, находим его радиус:  $r = \sqrt{10/\pi}$ . Докажем, что круг радиусом  $\sqrt{10/\pi}$  с центром в точке  $O$  с координатами  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 1/4$  содержит ровно 10 узлов единичной квадратной решетки, а именно что этот круг содержит (см. рис. 46) узлы  $A_{12}$ ,  $A_{13}$ ,  $A_{14}$ ,  $A_{17}$ ,  $A_{18}$ ,  $A_{19}$ ,  $A_{22}$ ,  $A_{23}$ ,  $A_{24}$ ,  $A_8$  и не содержит ни одного другого узла.

Докажем прежде всего, что круг, о котором говорится в условии задачи, содержит точку  $A_{24}$ . Отсюда будет следовать, что он содержит первые девять из перечисленных выше узлов решетки. Имеем:

$$OA_{24}^2 = \left(\frac{5}{4}\right)^2 + 1 = \frac{25 + 16}{16} = \frac{41}{16} < \frac{10}{\pi} = r^2.$$

Докажем, что наш круг содержит точку  $A_8$ :

$$OA_8^2 = \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{49}{16} < \frac{10}{\pi}.$$

Докажем теперь, что ни один другой узел решетки не принадлежит внутренности круга радиуса  $r$  с центром в точке  $O$ . Для этого достаточно показать, что точки  $A_{28}$ ,  $A_{20}$  и  $A_9$  лежат вне круга.

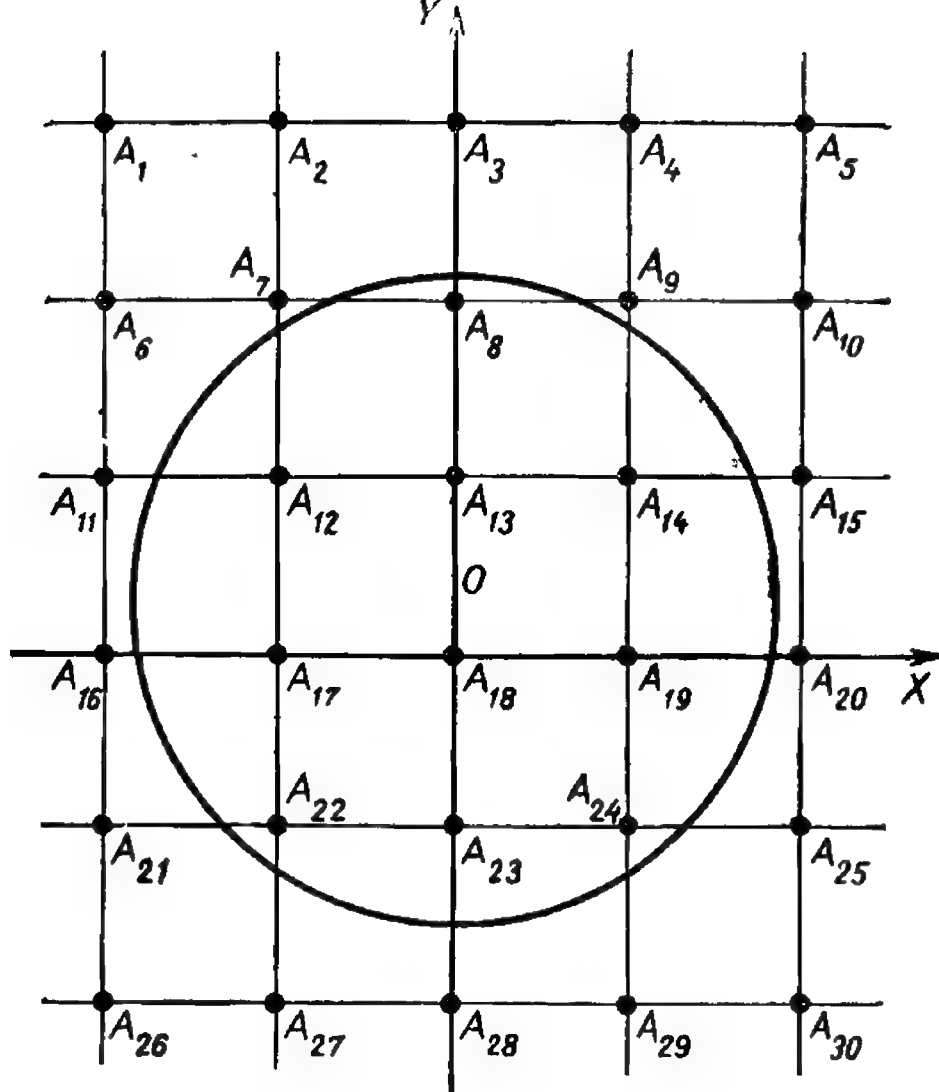


Рис. 46

Вычисляя последовательно квадраты расстояний от названных точек до центра круга, получаем

$$OA_{28}^2 = \left(\frac{9}{4}\right)^2 = \frac{81}{16} > \frac{10}{\pi}, \quad OA_{20}^2 = \frac{1}{16} + 4 = \frac{65}{16} > \frac{10}{\pi},$$

$$OA_9^2 = \left(\frac{7}{4}\right)^2 + 1 = \frac{65}{16} > \frac{10}{\pi},$$

что и завершает доказательство.

38. Приняв обозначения, показанные на рис. 46, напишем систему уравнений

$$\begin{cases} y + \frac{\sqrt{3}}{2}x + h = 1, \\ y^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = x^2, \\ h^2 + \left(\frac{1-x}{2}\right)^2 = x^2. \end{cases}$$

Из второго и третьего уравнений находим

$$\left(\frac{1-x}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = y^2 - h^2,$$

а поскольку

$$1 - \frac{x\sqrt{3}}{2} = y + h,$$

то

$$\left(\frac{1-x}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = (y-h) \left(1 - \frac{x\sqrt{3}}{2}\right).$$

Итак, мы приходим к системе двух уравнений

$$\begin{cases} y-h = \frac{\left(\frac{1-x}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}{1 - \frac{x\sqrt{3}}{2}}, \\ y+h = 1 - \frac{x\sqrt{3}}{2}, \end{cases}$$

откуда после несложных преобразований находим

$$y = \frac{2 + 2x^2 - (1 + 2\sqrt{3})x}{2(2 - x\sqrt{3})}.$$

Подставив полученное выражение во второе уравнение исходной системы, после довольно утомительных, хотя и несложных, преобразований получим для  $x$  следующее уравнение четвертого порядка:

$$2x^4 - (2\sqrt{3} - 3)x^3 + (\sqrt{3} + 2)x^2 + (3\sqrt{3} + 1)x - 2 = 0.$$

Очевидно, что  $x = 1$  — один из его корней, но он не подходит по смыслу задачи. Разделив многочлен, стоящий в левой части уравнения, на  $x - 1$ , получим кубическое уравнение

$$2x^3 - (2\sqrt{3} - 3)x^2 - (3\sqrt{3} - 1)x + 2 = 0.$$

Подставляя  $x = z + \frac{2\sqrt{3} - 3}{6}$ , преобразуем его к виду

$$z^3 + pz + q = 0,$$

где

$$p = -\frac{2\sqrt{3} + 5}{4}, \quad q = \frac{7\sqrt{3} + 18}{36}.$$

Нетрудно проверить, что

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0,$$

вследствие чего кубическое уравнение имеет три различных вещественных корня, которые можно вычислить по формуле

$$z_k = 2\sqrt[3]{\rho} \cos \frac{1}{3} (\varphi + 2k\pi),$$

где  $k = 0, 1, 2$ ;  $\cos \varphi = -q/2\rho$ ,  $\rho = (\sqrt{-p/3})^3$ .

Для приведенных выше значений коэффициентов  $p$  и  $q$   $\cos \varphi \approx \approx 0,706$ , откуда  $\varphi \approx 3\pi/4$ .

Из условий задачи следует, что  $1/2 < x < 1$ . Этому неравенству удовлетворяет лишь один корень кубического уравнения, соответствующий  $k = 2$ .

Итак,

$$z = \sqrt{\frac{2\sqrt{3} + 5}{12}} \cos \frac{1}{3} \left( \frac{3\pi}{4} + 2 \cdot 2\pi \right) \approx 0,435,$$

и, следовательно,

$$x = \frac{2\sqrt{3} - 3}{6} \approx 0,435 + 0,0766 \approx 0,512.$$

Зная  $x$ , без труда находим  $y$  и  $h$ :

$$y \approx 0,11, \quad h \approx 0,45.$$

39. Ответ задачи зависит от того, будем ли мы считать различными два зеркально симметричных тетраэдра или нет. В первом случае число различных тетраэдров, которые можно склеить из палочек, равно 60, во втором — только 30. Докажем это.

На рис. 47 схематически изображен тетраэдр, ребра которого обозначены буквами  $a, b, c, d, e, f$ . Перенумеруем палочки, из которых будем клеить тетраэдр, числами от 1 до 6. Каждая из палочек может оказаться на месте любого из ребер  $a, b, c, d, e, f$ . Таким образом, число возможных способов расположения палочек равно  $6! = 720$ , то есть числу всех перестановок шести предметов. Однако не все перестановки порождают различные тетраэдры. Некоторые из тетраэдров отличаются лишь ориентацией.

Предположим на миг, что все ребра тетраэдра, изображенного на рис. 47, имеют одинаковую длину. Исследуем, сколько существует различных способов построения такого тетраэдра («готовый» тетраэдр должен находиться в «эталонном» положении, показанном на рис. 47). Заметим, что: 1) основанием тетраэдра может служить любая из четырех его граней; 2) основание тетраэдра имеет вид равностороннего треугольника, который можно расположить тремя различными способами. Таким образом, всего мы получаем  $3 \cdot 4 = 12$  различных положений одного и того же тетраэдра (и одновременно — все возможные положения тетраэдра, при котором его ребра совпадают с ребрами исходного тетраэдра).

Рассмотрим 720 возможных вариантов распределения палочек 1—6 среди ребер  $a—f$ .

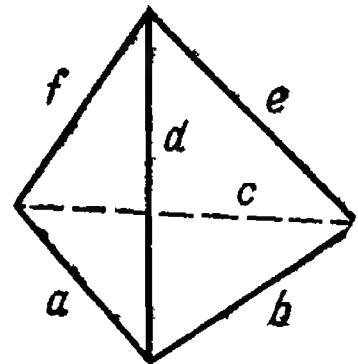


Рис. 47.



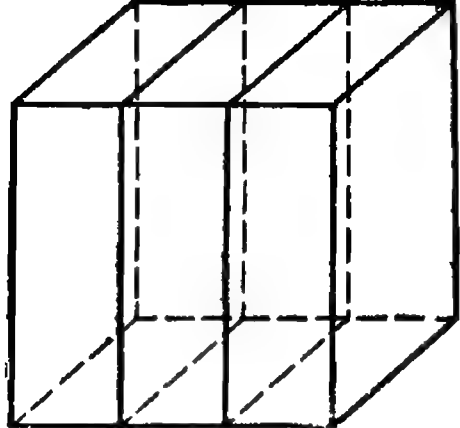


Рис. 48.

Каждый из склеенных тетраэдров встречается 12 раз в различных положениях. Следовательно, число различных тетраэдров, которые можно склеить из 6 палочек различной длины, равно  $720 : 12 = 60$ . Если мы не будем различать зеркально симметричные тетраэдры, то число различных тетраэдров уменьшится вдвое и станет равным лишь 30.

40. Внутренние, то есть прилегающие друг к другу, грани кубиков лежат в трех парах параллельных плоскостей, одна из которых представлена на рис. 48.

Прямая  $l$ , «пропасающая» куб, может пробить каждую из этих шести плоскостей самое большее в одной точке, а поскольку прямая  $l$  не пересекает ребра малых кубиков, то у нее может быть не более шести точек пересечения с внутренними гранями кубиков. Кроме того, прямая  $l$  может пересекаться с двумя внешними гранями. Таким образом, общее число точек пересечения прямой с гранями кубиков не превышает 8. Это означает, что прямая  $l$  «пропасает» не более 7 кубиков.

Для того чтобы упростить построение искомой прямой  $l$ , проходящей через 7 кубиков, перенумеруем 27 элементарных кубиков, из которых составлен большой куб, так, как показано на рис. 49. Каждый кружок соответствует кубику. Каждый кубик обозначен трехзначным числом: первая цифра означает номер (отсчитываемый снизу) горизонтального слоя, в котором лежит кубик, вторая — номер вертикального слоя, параллельного передней грани куба, и третья — номер (отсчитываемый слева направо) вертикального слоя, параллельного боковым граням. Если два кубика имеют номера, отличающиеся лишь одной цифрой, например 111 и 211, 213 и 223, 221

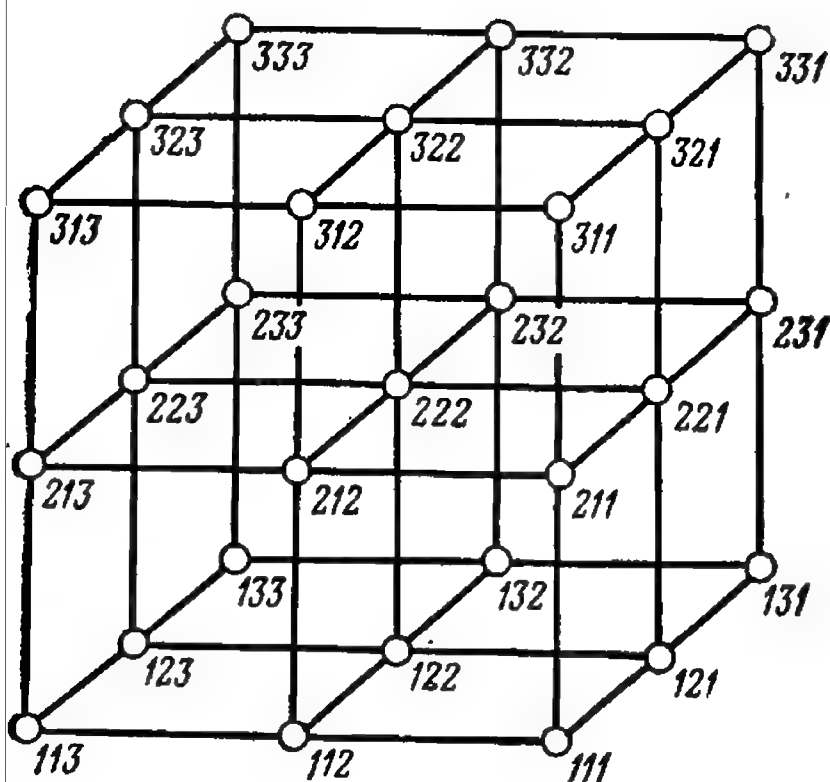


Рис. 49.

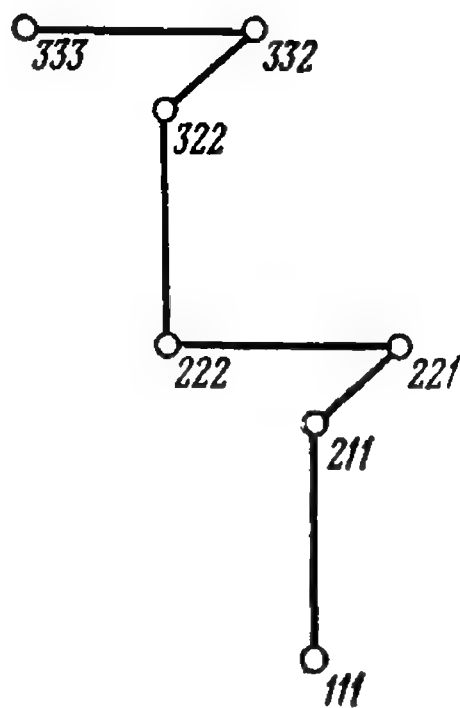


Рис. 50.

и 222, то эти кубики имеют общую грань: в первом случае — горизонтальную, во втором — вертикальную, параллельную передней грани куба, в третьем — вертикальную, параллельную боковым граням.

Поскольку прямая  $l$  не проходит ни через одно ребро, «пронзенные» кубики не могут прилегать друг к другу только ребрами, а имеют общие грани. Следовательно, если номера пробитых прямой  $l$  кубиков выписать в том порядке, в каком они «нанизаны» на прямую  $l$ , например

111, 211, 221, 222, 322, 332, 333, (1)

то получим последовательность, в которой соседние номера отличаются лишь одной цифрой и то на 1, а первые, вторые и третьи цифры образуют неубывающие или невозрастающие последовательности.

Нетрудно понять, что прямая  $l$  лишь тогда может проходить сквозь 7 кубиков, если два нанизанных на нее кубика находятся на противоположных концах диагонали большого куба. Такими могут быть кубики 111 и 333, 113 и 331, 133 и 311 или, наконец, 131 и 313. Действительно, лишь в этом случае мы получим 6 изменений цифр (при каждом изменении цифра увеличивается или уменьшается на 1) и, следовательно (с учетом первого и последнего кубиков), 7 кубиков, нанизанных на прямую  $l$ .

Ясно, что если прямая  $l$  проходит через два кубика, лежащих на противоположных концах диагонали, например через кубики 111 и 333, то она проходит и через центральный кубик 222, который получается, если любой из «конечных» кубиков сдвинуть вдоль диагонали, не меняя его ориентации.

Последовательность кубиков (1) можно изобразить в виде графа (рис. 50), выбирая в качестве вершин кружки, расположенные так же, как на рис. 49. На таком графе перемещение по вертикали сопровождается изменением на 1 первой цифры, перемещение по наклонной — изменением на 1 второй цифры и перемещение по горизонтали — изменением на 1 третьей цифры.

Положение прямой  $l$ , проходящей через куб, будет определено, если задать две точки,

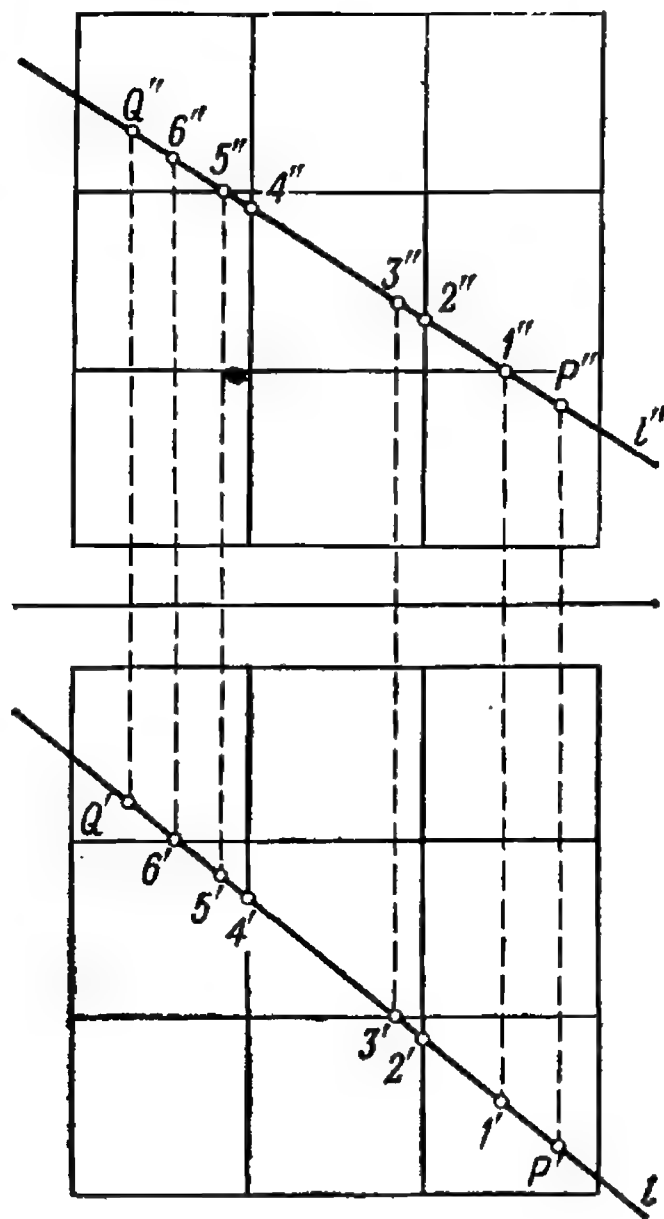


Рис. 51.

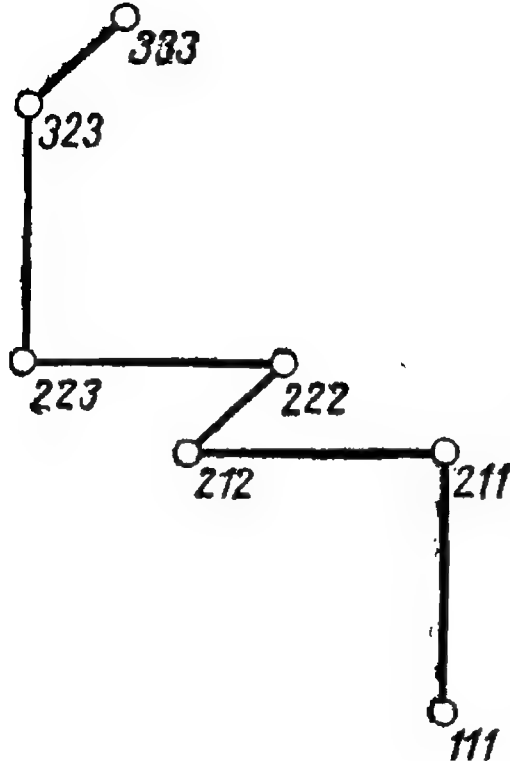


Рис. 52.

лежащие на прямой, например точки, находящиеся внутри кубиков 111 и 333. Проецируя большой куб на две взаимно перпендикулярные плоскости (одну — параллельную основаниям, другую — параллельную передней грани) и выбирая произвольные точки ( $P', P''$ ) и ( $Q', Q''$ ) в кубиках 111 и 333 (рис. 51), мы неизменно получаем прямую  $l$ , проходящую через 7 кубиков (если только прямая не пересекает ни одного ребра).

В случае, изображенном на рис. 51, прямая  $l$  выходит из кубика 111 в точке 1, попадает в кубик 211, оттуда в точке 2 попадает в кубик 212, затем (в точке 3) — в кубик 222, в точке 4 — в кубик 223, в точке 5 — в кубик 323 и, наконец, в точке 6 — в кубик 333. Пересечение прямой  $l$  с любым ребром малого куба означало бы, что какие-то из точек 1, 2, ..., 6 пересечения прямой  $l$  с внутренними гранями кубиков, попарно совпадают (на рис. 51 этого не происходит). То же условие можно выразить иначе, потребовав, чтобы прямая  $l$  ни на одной из проекций куба не проходила через узлы решетки, на которые разбивают проекцию большого куба проекции элементарных кубиков, или чтобы каждая из проекций  $l'$  и  $l''$  прямой проходила через 5 малых квадратов.

Расположение 7 кубиков, нанизанных на прямую  $l$ , для случая, изображенного на рис. 51, показано на рис. 52.

На прямую  $l$ , проходящую через кубики 111 и 333, 7 кубиков могут быть нанизаны 36 различными способами. Эти способы можно схематически изобразить так:

$$111 \left\{ \begin{array}{l} 211 \left\{ \begin{array}{l} 212 \\ 221 \end{array} \right\} \\ 121 \left\{ \begin{array}{l} 221 \\ 122 \end{array} \right\} \\ 112 \left\{ \begin{array}{l} 212 \\ 122 \end{array} \right\} \end{array} \right\} 222 \left\{ \begin{array}{l} 322 \left\{ \begin{array}{l} 332 \\ 323 \end{array} \right\} \\ 232 \left\{ \begin{array}{l} 332 \\ 233 \end{array} \right\} \\ 223 \left\{ \begin{array}{l} 323 \\ 233 \end{array} \right\} \end{array} \right\} 333$$

Возникают различные варианты нанизывания кубиков на прямую  $l$  следующим образом. Возьмем набор кубиков, по которым прямая  $l$  (рис. 50) проходит от начального кубика 111 до центрального кубика 222. Повернув этот набор сначала на  $120^\circ$ , затем еще на  $120^\circ$  вокруг диагонали куба, получим три набора кубиков, изображенных на рис. 53. Еще три набора кубиков мы получим, взяв наборы (рис. 54), симметричные трем уже полученным относительно диагональной плоскости (проходящей через диагональ основания и центр большого куба).

От кубика 222 до кубика 333 прямая  $l$  также проходит по 6 различным наборам кубиков. Комбинируя (независимо один от дру-

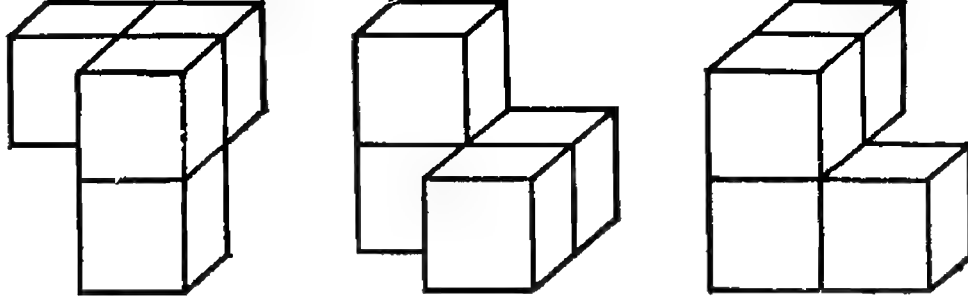


Рис. 53.

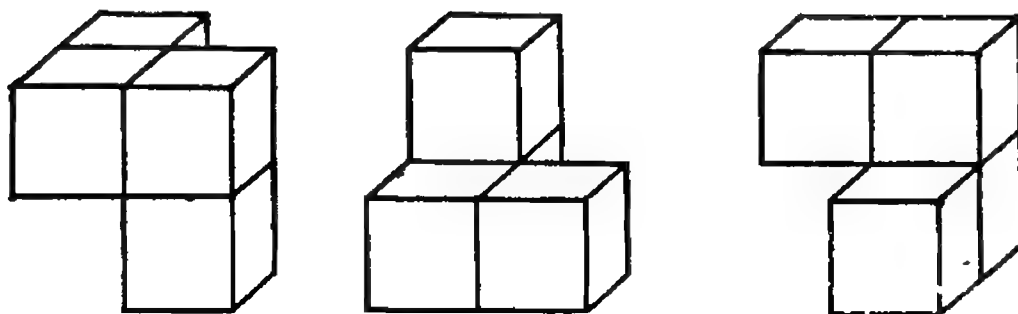


Рис. 54.

того) кубики первой шестерки с кубиками второй шестерки, получаем всего 36 различных способов, которыми 7 кубиков можно нанизать на прямую  $l$ .

41. Плотнейшую укладку сфер мы получим, если на слой сфер, показанных на рис. 55 сплошными линиями, положим сферы так, как показано на том же рисунке штриховыми линиями.

Малые промежутки образуются между четырьмя единичными сферами (на рис. 55 — между сферами с центрами в точках  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ ). Поскольку все эти сферы касаются друг друга, их центры расположены в вершинах правильного тетраэдра  $ABCD$  с длиной ребра, равной 2 (рис. 56). Сфера самого большого радиуса  $r_1$ , какую только можно вложить в малый промежуток между единичными сферами, будет касаться четырех единичных сфер, а ее центр будет совпадать с точкой пересечения высот тетраэдра.

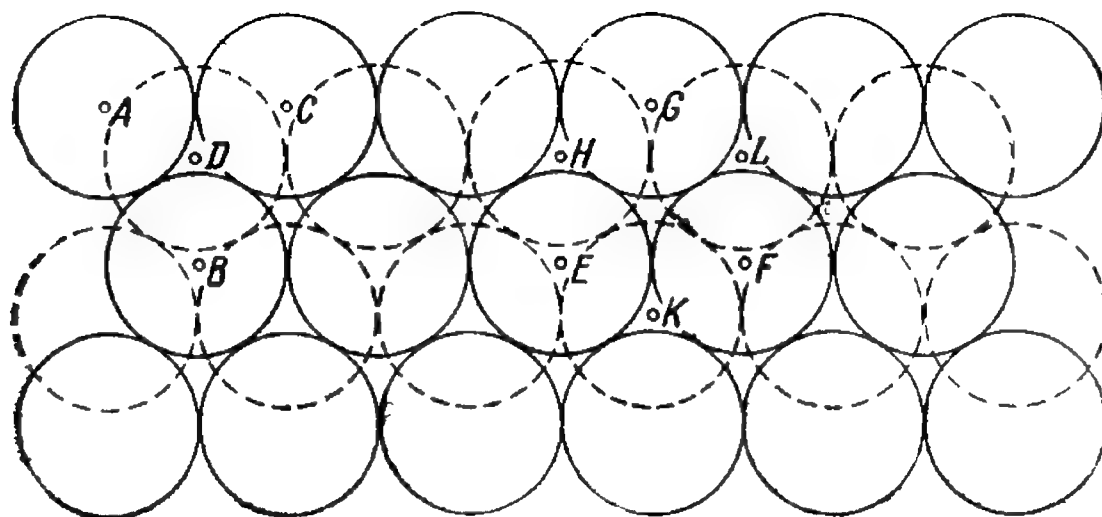


Рис. 55.

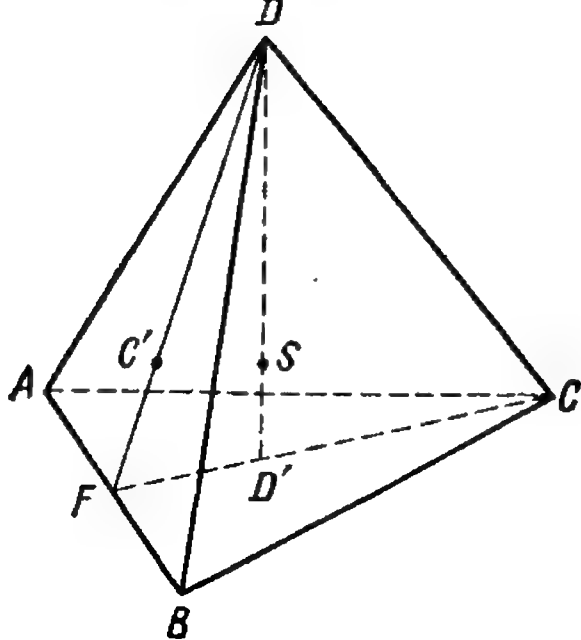


Рис. 56

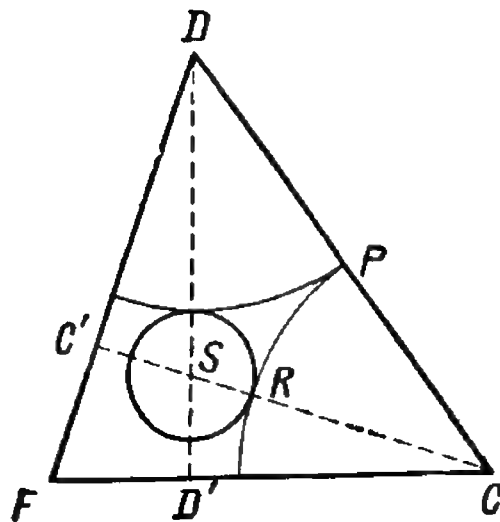


Рис. 57.

Для вычисления радиуса  $r_1$  рассмотрим сечение  $CDF$  тетраэдра  $ABCD$  плоскостью, проходящей через две высоты  $CC'$  и  $DD'$  тетраэдра (рис. 57). Имеем:

$$CP = DP = CR = 1, \quad CF = DF = \sqrt{3},$$

$$FD' = FC' > \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad CC' = DD' = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Треугольники  $CSD'$  и  $DFD'$  подобны, вследствие чего

$$\frac{SC}{SD'} = \frac{FD}{FD'}.$$

Учитывая равенство  $SD' = DD' - DS = DD' - SC$ , получаем

$$\frac{SC}{\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - SC} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

или

$$SC = 2\sqrt{6} - 3SC.$$

Следовательно,

$$SC = \frac{\sqrt{6}}{2},$$

а поскольку  $r_1 = CS - CR$ , то

$$r_1 = \frac{\sqrt{6}}{2} - 1.$$

Большие промежутки при плотнейшей укладке единичных сфер образуются между шестью сферами, например сферами с центрами в точках  $E, F, G, H, K$  и  $L$  на рис. 55. Поскольку любые три из шести сфер, образующих большой промежуток, касаются друг друга, центры всех шести сфер располагаются в вершинах правильного

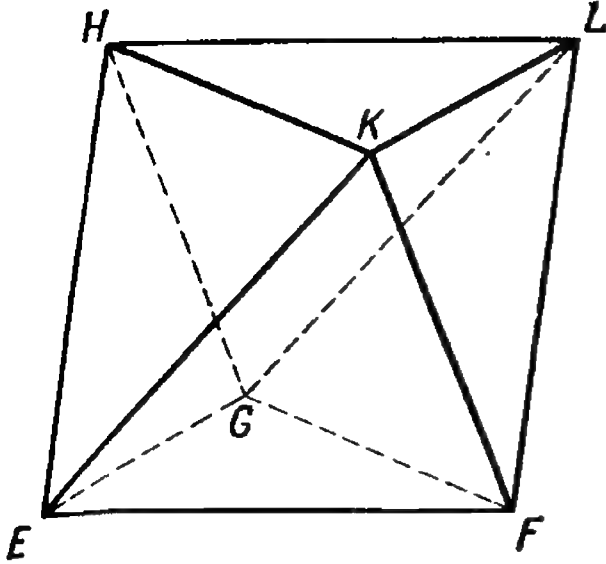


Рис. 58.

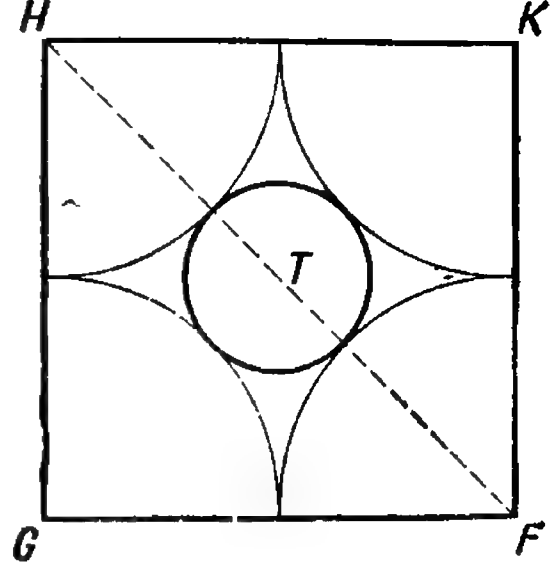


Рис. 59

октаэдра  $EFGHKL$  с длиной ребра, равной 2 (рис. 58). Сфера самого большого радиуса  $r_2$ , какую только можно поместить в большой промежуток между единичными сферами, будет касаться шести сфер. Ее центр будет совпадать с центром симметрии правильного тетраэдра  $EFGHKL$ , или, что то же, с центром квадрата  $FGHK$  (рис. 59). Радиус  $r_2$  можно вычислить как радиус окружности, касающейся четырех единичных окружностей, проведенных из вершин квадрата  $FGHK$  как из центров.

Таким образом,

$$KF = FG = GH = HK = 2, \quad HF = 2\sqrt{2},$$

откуда

$$r_2 = \sqrt{2} - 1.$$

42. Пусть  $n$  — число плоскостей, проходящих через центр сферы  $K$  параллельно граням данного правильного многогранника. На поверхности сферы каждая такая плоскость высекает большой круг. Ясно, что все большие круги пересекаются, причем, если многогранник правильный, то через любую точку на нем не могут одновременно проходить три больших круга, высекаемых плоскостями, параллельными его граням и проходящими через центр сферы. (Действительно, если бы через какую-то точку проходили одновременно три больших круга, то это бы означало, что в многограннике имеются по крайней мере три грани, из которых любые две не параллельны, а все три — перпендикулярны некоторой плоскости. Для правильных многогранников подобная ситуация невозможна.) Таким образом, рассматриваемые нами большие круги пересекаются в  $n(n-1)$  точках, а точки пересечения делят их на  $2n(n-1)$  дуг, поскольку из каждой такой точки выходят 4 дуги, а каждая дуга соединяет 2 точки пересечения. Отсюда следует, что у производного многогранника имеется  $w = n(n-1)$  вершин и  $k = 2n(n-1)$  ребер. Если  $s$  — число граней производного многогранника, то, воспользовавшись формулой Эйлера для многогранников  $w + s = k + 2$ , получим

$$n(n-1) + s = 2n(n-1) + 2,$$

откуда

$$s = n^2 - n + 2.$$

Пользуясь этим выражением, составим таблицу числа вершин, ребер и граней для производных многогранников пяти платоновых тел.

Название правильного (платонова) многогранника	$n$	Производный многогранник		
		$\omega$	$k$	$s$
Куб	3	6	12	8
Тетраэдр	4	12	24	14
Октаэдр	4	12	24	14
Додекаэдр	6	30	60	32
Икосаэдр	10	90	180	92

Переходим теперь непосредственно к построению производных многогранников.

а) Особенно просто построить производный многогранник куба. Сферу  $K$  можно рассматривать как вписанную в куб. Тогда большие круги, высекаемые на поверхности сферы плоскостями, проходящими через центр сферы параллельно граням куба, будут пересекаться в точках касания сферы и куба. Следовательно, производным многогранником для куба служит правильный октаэдр.

б) Производным многогранником правильного тетраэдра является, как мы уже знаем, некоторый четырнадцатигранник с 12 вершинами и 24 ребрами. Плоскость, проходящая через центр сферы  $K$  параллельно основанию исходного тетраэдра, пересекается с плоскостями, параллельными боковым граням, по диаметрам сферы, параллельным ребрам, лежащим в основании тетраэдра. Следовательно, большие круги, соответствующие боковым граням тетраэдра, разбивают большой круг, соответствующий основанию тетраэдра, на 6 раз-

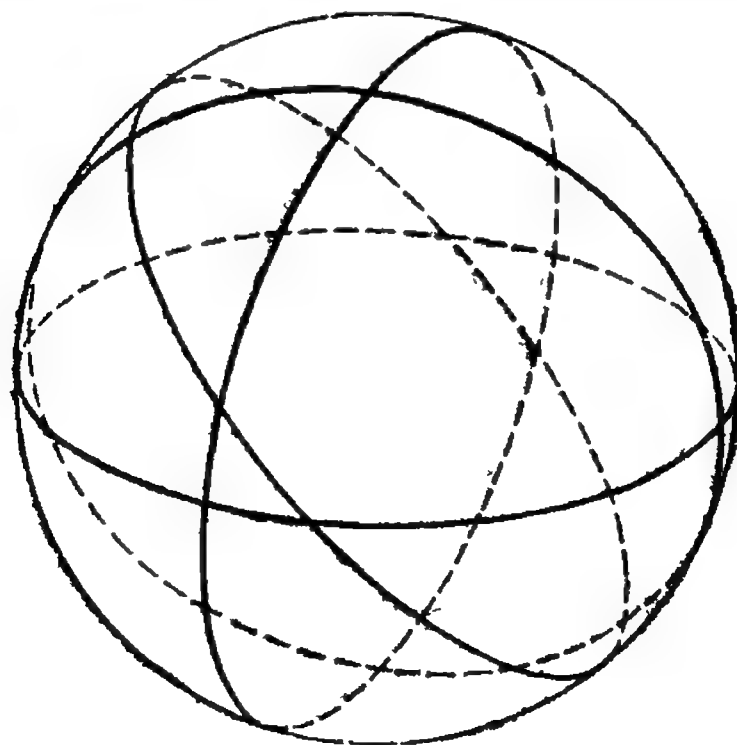


Рис. 60.



личных дуг. То же самое — ввиду правильности исходного многогранника — можно сказать и о других больших кругах. Таким образом, все ребра получившегося четырнадцатигранника равны радиусу сферы  $K$ .

Большие круги, плоскости которых параллельны боковым граням исходного тетраэдра, пересекаются в 6 точках, образующих вершины двух сферических треугольников (рис. 60). Этим треугольникам в производном четырнадцатиграннике соответствуют две грани, имеющие форму равносторонних треугольников. Повторяя те же рассуждения для остальных граней исходного тетраэдра, получаем всего 8 конгруэнтных равносторонних треугольников. Поскольку ни одна пара треугольных граней не имеет общих ребер (зато каждая вершина принадлежит трем граням, имеющим форму равностороннего треугольника), то наше построение исчерпывает все ребра производного многогранника. Таким образом, остальные 6 граней должны быть четырехугольными, а поскольку все ребра нашего производного многогранника имеют одинаковую длину, то эти 6 граней имеют форму ромба.

Покажем, что все ромбы в действительности являются квадратами.

Рассмотрим для этого ребра производного четырнадцатигранника, лежащие, например, в плоскости, параллельной основанию исходного тетраэдра. Они образуют правильный шестиугольник, стороны которого параллельны большим диагоналям четырнадцатигранника и, следовательно, ребрам, лежащим в основании исходного тетраэдра. То же самое можно утверждать и о других ребрах производного многогранника. Однако поскольку непересекающиеся ребра тетраэдра попарно взаимно перпендикулярны, то и непараллельные стороны ромбов взаимно перпендикулярны. Следовательно, ромбы в действительности являются квадратами.

Таким образом, для правильного тетраэдра производный многогранник имеет форму полуправильного четырнадцатигранника (рис. 61), построенного из квадратов и равносторонних треугольников.

в) Правильный октаэдр мы получим, соединив середины ребер тетраэдра отрезками, лежащими в гранях тетраэдра (рис. 62). Поскольку грани построенного таким способом октаэдра параллельны соответствующим граням тетраэдра, то производный многогранник правильного тетраэдра будет одновременно и производным многогранником правильного октаэдра.

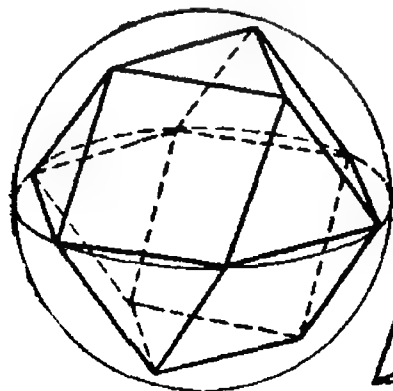


Рис. 61.

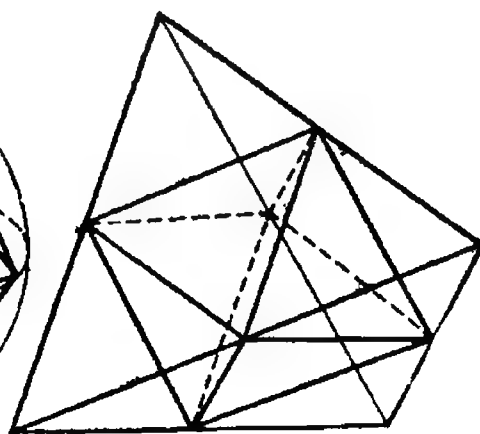


Рис. 62.

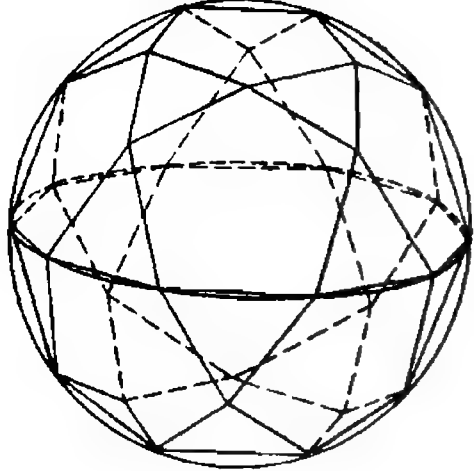


Рис. 63.

г) Построение производного многогранника правильного додекаэдра можно производить так же, как в случае правильного тетраэдра.

Выделим две параллельные грани додекаэдра и назовем их основаниями. Тогда плоскости, проходящие через центр сферы параллельно пяти боковым граням, пересекают большой круг, лежащий в горизонтальной плоскости, по диаметрам, параллельным ребрам, ограничивающим верхнее и нижнее основания додекаэдра. Таким образом, большой круг, лежащий в плоскости оснований, разбивается на 10 равных дуг. То же

самое можно сказать и обо всех остальных больших кругах. Следовательно, длины всех ребер производного многогранника правильного додекаэдра равны.

Большие круги, параллельные боковым граням, пересекаются в 20 точках. Пять из этих точек образуют вершины одного, а еще пять — другого правильного сферического пятиугольника (существование этих пятиугольников следует из параллельности плоскостей, пересекающихся вдоль ребер оснований, правильность — из равенства дуг и углов между дугами). Соединив хордами вершины этих пятиугольников, получим два правильных пятиугольника (рис. 63), лежащих в плоскостях, параллельных основаниям додекаэдра.

Повторяя те же рассуждения для остальных пар граней додекаэдра, заключаем, что 12 граней нашего производного многогранника имеют форму правильных пятиугольников. Поскольку никакие два пятиугольника не имеют общих ребер, то наше построение исчерпывает все (см. таблицу) ребра многогранника. Следовательно, его остальные 20 граней должны иметь форму правильных треугольников (доказано, что эти грани ограничены 60 ребрами одинаковой длины). Полученный многогранник называется полуправильным тридцатидвухгранником.

д) Переходим к построению производного многогранника правильного икосаэдра. Поскольку этот случай гораздо сложнее преды-

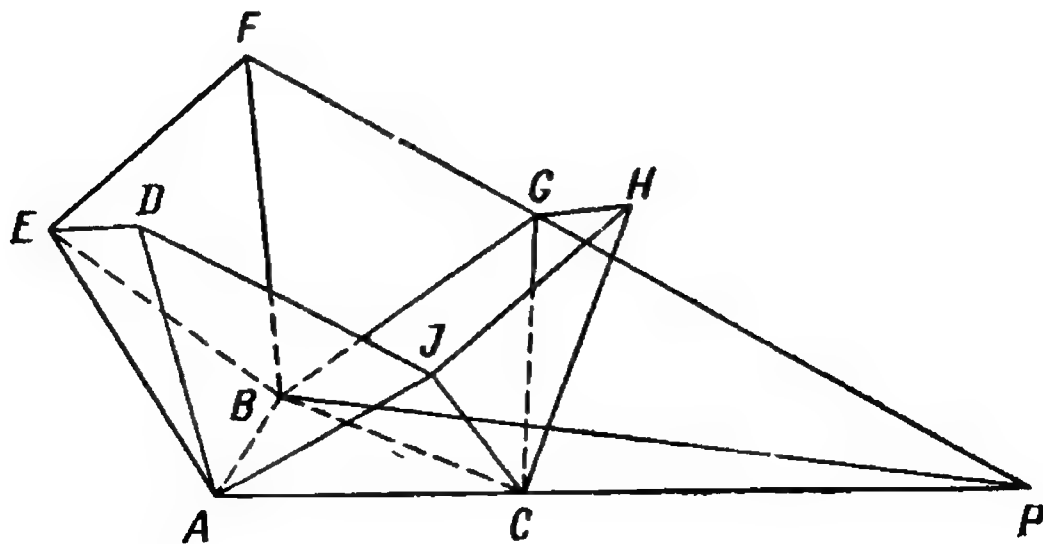


Рис. 64

душих, мы начнем с рассмотрения не всего икосаэдра, а лишь его половины, то есть части, образованной десятью гранями, сходящимися в вершинах какой-нибудь одной грани, например грани  $ABC$  (рис. 64), которую будем считать основанием икосаэдра.

Плоскостями, параллельными этим граням, исчерпывается все, что необходимо знать для построения производного многогранника, поскольку остальные грани параллельны граням, сходящимся в вершинах основания  $ABC$ .

Плоскости, параллельные граням, имеющим общие ребра с основанием, и, следовательно, параллельные соответственно прямым  $AB$ ,  $BC$  и  $CA$ , делят большой круг, плоскость которого параллельна плоскости основания, на 6 равных частей. Чтобы найти расположение точек деления этого круга плоскостями, параллельными остальным граням, необходимо вычислить углы между линиями пересечения боковых граней с основанием и ребрами, лежащими в основании. Вычислим, например, угол, образуемый линией пересечения граней  $BFG$  и  $ABC$  с ребром  $AC$ .

Поскольку  $AEFGC$  — правильный пятиугольник, то продолжения его сторон  $AC$  и  $FG$  должны пересекаться в некоторой точке  $P$ , причем  $\angle GPC = 36^\circ$ . Отсюда следует, что

$$GP = CP = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} CG = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} AB.$$

Из треугольника  $ABP$  находим длину отрезка  $BP$ :

$$\begin{aligned} BP &= \sqrt{AB^2 + AP^2 - 2AB \cdot AP \cos 60^\circ} = \\ &= \sqrt{AB^2 + (AC + CP)^2 - AB(AC + CP)} = \sqrt{AB^2 + CP^2} = \\ &= \sqrt{1 + \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2}\right)^2} AB = \frac{\sqrt{2}}{2} (\sqrt{5} + 1) AB. \end{aligned}$$

Теперь уже нетрудно вычислить искомый угол между линией пересечения граней  $BFG$  и  $ABC$  и ребром  $AC$ , то есть  $\angle BPA$ . Действительно,

$$\frac{\sin(\angle APB)}{AB} = \frac{\sin(\angle BAC)}{BP},$$

откуда

$$\sin(\angle APB) = \frac{AB}{BP} \sin(\angle BAC) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10} + \sqrt{2}}$$

и

$$\angle APB = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10} + \sqrt{2}} = \arcsin 0,3784 \approx 22^\circ 14'.$$

Можно сказать, что 9 больших кругов, плоскости которых параллельны боковым граням икосаэдра, делят большой круг, лежащий в плоскости, параллельной основанию, на 18 неравных частей: 12 частей по  $22^\circ 14'$  и 6 частей по  $60^\circ - 2 \cdot 22^\circ 14' = 15^\circ 32'$ . То же самое можно сказать и об остальных больших кругах. Таким образом, не все ребра производного многогранника икосаэдра оказываются равными: они разбиваются на две группы. Более длинных

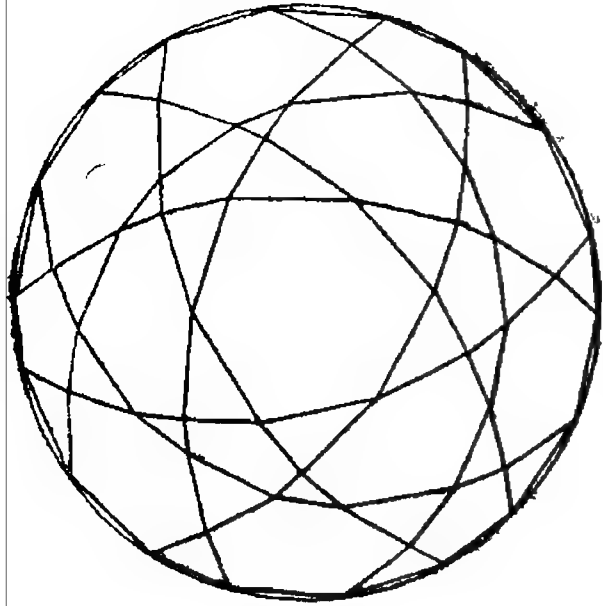


Рис. 65.

ребер вдвое больше, чем коротких. Следовательно, у производного многогранника правильного икосаэдра 120 длинных и 60 коротких ребер.

Рассмотрим теперь грани, пересекающиеся, например, в вершине  $A$ . Плоскости, параллельные этим граням, а следовательно, и ребрам  $IC$ ,  $CB$ ,  $BE$ ,  $ED$  и  $DJ$ , высекают на сфере  $K$  два правильных сферических пятиугольника. Всего имеется 12 таких пятиугольников (каждое ребро соединяет две вершины). Каждые 5 кругов, образующих два данных правильных пятиугольника, пересекаясь, порождают 10 треугольников — по 5 треугольников при каждом сферическом

пятиугольнике (рис. 65). Треугольники прилегают — каждый одной стороной — к пятиугольникам. Всего имеется 60 таких треугольников. Таким образом, все ребра производного многогранника правильного икосаэдра построены (см. таблицу). Его остальные грани, ограниченные 120 ребрами, имеют вид шестиугольников, все стороны которых равны. Заменяя дуги больших кругов хордами, получим производный многогранник.

Рассмотрим теперь шестиугольники более подробно. Их стороны, как уже упоминалось, равны. Они образованы дугами больших кругов, высекаемых на сфере гранями, проходящими через ребра  $DJ$ ,  $JH$ ,  $HG$ ,  $GF$ ,  $FE$  и  $ED$ . Углы между гранями не одинаковы и зависят от того, смежны ли грани или имеют лишь общую вершину. Углы между сторонами равносторонних шестиугольников поэтому также не одинаковы. Если внутренние углы одного шестиугольника перенумеровать, то все четные углы окажутся равными одной, а все нечетные — другой величине. Однако поскольку стороны шестиугольника, образованного хордами, равны, то он не может быть плоским шестиугольником, ибо тогда он был бы правильным шестиугольником (все его вершины лежат на сфере, и если бы он был плоским, то они лежали бы на одной окружности).

Таким образом, в рассматриваемом случае производный многогранник не является многогранником в обычном смысле.

**43.** Приведем лишь один пример, противоречащий предположению, которое сформулировано в условии задачи.

Начертим развертку тетраэдра, в основании которого лежит равносторонний треугольник, а боковыми гранями служат равнобедренные треугольники с углом при вершине  $S$ , равным  $30^\circ$  (рис. 66). Пусть  $P$  — середина одного из ребер основания. Расстояние от любой точки  $x$  развертки до точки  $P$  всегда меньше длины отрезка  $PS$ , поскольку все точки развертки лежат внутри окружности радиуса  $PS$  с центром в точке  $P$  и лишь точка  $S$  лежит на самой окружности. Отсюда следует, что любая дуга, отличная от отрезка  $PS$  и соединяющая точки  $P$  и  $S$  на поверхности четырехгранника, длиннее отрезка  $PS$ . Следовательно, наш четырехгранник опровергает предпо-

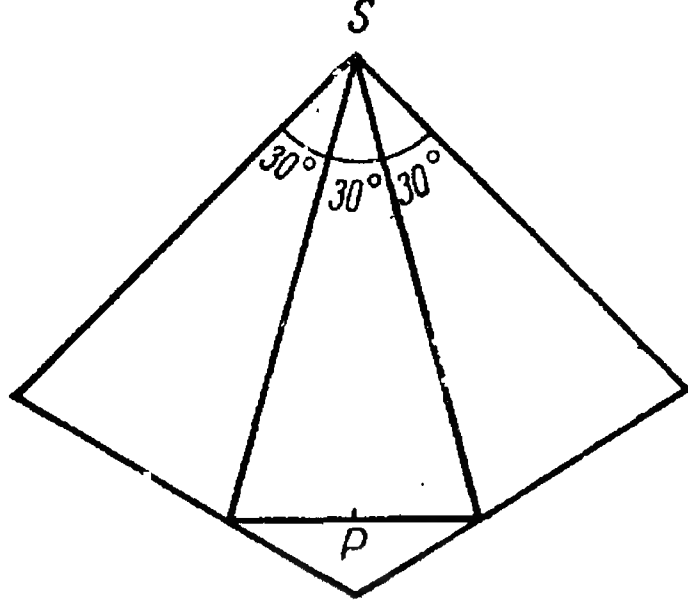


Рис. 66.

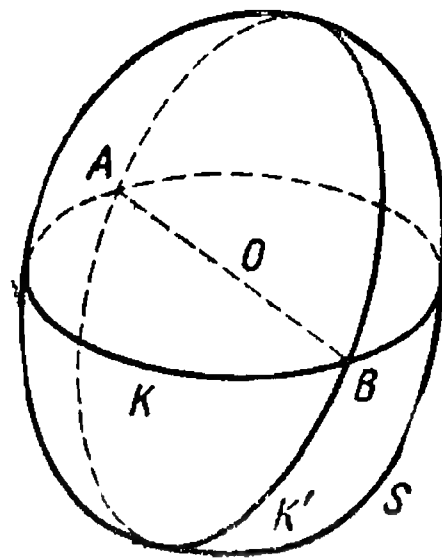


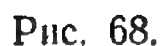
Рис. 67.

ложение, сформулированное в условии задачи, что и требовалось доказать.

44. Пусть  $S$  (рис. 67) — замкнутая поверхность, удовлетворяющая условиям задачи. Выберем такое сечение поверхности, которое не меньше любого другого сечения. Пусть таким сечением будет окружность  $K$ . Через центр  $O$  окружности  $K$  проведем произвольное сечение  $K'$  поверхности  $S$ . Плоскости, в которых лежат окружности  $K$  и  $K'$ , пересекаются по диаметру  $AB$  окружности  $K$ , но это означает, что  $AB$  — хорда окружности  $K'$ . Следовательно, окружность  $K'$  не может быть меньше окружности  $K$ , а поскольку, с другой стороны,  $K'$  не может быть и больше  $K$ , то обе окружности равны и, кроме того, имеют общий центр.

Сечение  $K'$  было выбрано совершенно произвольно с единственным условием: его плоскость должна была проходить через центр  $O$  окружности  $K$ . Поэтому всякое сечение поверхности  $S$  плоскостью, проходящей через точку  $O$ , обладает всеми свойствами, которыми по доказанному обладает  $K'$ . Следовательно, поверхность  $S$  — сфера, что и требовалось доказать.

45. Введем в пространстве прямоугольную систему координат  $X, Y, Z$  с началом в точке  $O$  (рис. 68). Выбрав на оси  $X$  точку  $P$ , отличную от  $O$ , проведем через нее прямую  $t$ , перпендикулярную оси  $X$  и лежащую в плоскости  $XY$ . Затем в плоскости  $XY$  проведем дугу окружности  $AQB$  с центром в точке  $P$  и радиусом  $PQ$ . Через прямую  $t$  и точку  $A$  проведем плоскость  $\pi$ . Будем поворачивать теперь плоскость  $\pi$  вокруг прямой  $t$  до тех пор, пока она не пройдет через точку  $B$ . Если в каждом положении плоскости  $\pi$  построить в ней окружность с центром в точке  $S$  — середине отрезка  $MN$ , — проходящую через точки  $M$  и  $N$  (точка  $M$  лежит на дуге  $AQB$ , точка  $N$  — на оси  $Z$ ), то получится замкнутая выпуклая поверхность («двурог»), отличная от сферической и удовлетворяющая всем условиям задачи. Действительно, любая плоскость, проходящая через прямую  $t$ , пересекает построенную поверхность по окружности (если эта плоскость вообще пересекается с «двурогом»).



166

ее начальной скорости. Заменяя  $|u|$  на  $u$  или  $-u$ , а  $|v|$  — на  $v$  или  $-v$ , получаем соотношение вида

$$pu + qv + rw = 0$$

с целыми коэффициентами  $p, q, r$ . Поскольку  $|p| = |q| \neq 0$ , мы приходим к противоречию с той частью условия задачи, где говорится об арифметической независимости составляющих  $u, v, w$  скорости частицы  $M$ . Следовательно, предположение о том, что частица  $M$  по истечении времени  $t$  возвращается в исходное положение, неверно.

47. Вторая часть условия задачи, в которой говорится о числах на несмежных гранях, допускает различные толкования. Ее можно понимать тремя различными способами.

1. Каждая пара чисел, стоящая на несмежных гранях, имеет общий делитель (отличный от 1; в дальнейшем для краткости мы не будем делать этой оговорки)

2. Все числа, стоящие на гранях набора, который не содержит ни одной пары смежных граней, а в остальном произволен, имеют общий делитель.

3. Выберем наугад любую грань. Рассмотрим набор, состоящий из выбранной и всех несмежных с ней граней. Все числа, стоящие на гранях, входящих в набор, имеют общий множитель.

В зависимости от интерпретации второй части условия задача допускает различные решения.

Предположим, что вторую часть условия мы понимаем так, как в п. 1. Тогда задача разрешима для всех правильных и не только правильных многогранников.

Действительно, возьмем произвольный многогранник, перенумеруем его грани последовательными натуральными числами и рассмотрим все возможные пары граней. Каждая такая пара образована либо смежными, либо несмежными гранями. Перенумеруем все пары несмежных граней. Рассматривая по очереди все пары несмежных граней, выпишем на каждой из граней, образующих  $k$ -ю пару, по  $k$ -му простому числу  $p_k$ . Все числа, оказавшиеся по окончании перебора на одной грани, перемножим и, стерев их, заменим полученным произведением.

Может случиться, что некоторые из граней при указанном способе заполнения их числами окажутся пустыми. На каждой из пустых граней напишем по одному из еще не использованных простых чисел.

Ясно, что при этом оба условия задачи будут выполнены независимо от того, принадлежит рассматриваемый многогранник к числу правильных или нет.

Если вторую часть условия понимать так, как в п. 2, то решение задачи аналогично предыдущему: нужно перенумеровать все наборы, образуемые несмежными гранями, и на каждой из граней, входящей в  $k$ -й набор, написать  $k$ -е простое число. Дальнейший ход решения полностью совпадает с решением в уже рассмотренном случае.

Наконец, если вторую часть условия задачи понимать так, как в п. 3, то задача имеет решение лишь для куба и тетраэдра. Среди правильных тел они выделяются тем, что грани, не смежные с любой выбранной гранью, не содержат ни одной пары граней, смежных друг с другом. В кубе для каждой выбранной грани существует



лишь одна несмежная с ней грань, в тетраэдре любые две грани смежны. Разместить на гранях остальных правильных тел натуральные числа, не нарушив при этом второй части условия задачи, понимаемой в смысле п. 3, невозможно.

48. Никакие две из трех данных сфер не могут касаться одна другой, ибо плоскость, проходящая через точку касания  $P$ , была бы касательной к обеим сферам и пересекалась бы с третьей сферой по некоторой окружности. Касательная к этой окружности в точке  $P$  была бы касательной ко всем трем сферам, что противоречит условию задачи.

Следовательно, две сферы должны пересекаться по окружности, на которой лежит точка  $P$ . Эта окружность пересекает третью сферу, ибо в противном случае прямая, касательная к окружности в точке  $P$ , была бы касательной ко всем трем сферам. Поскольку окружность пересекает третью сферу в точке  $P$ , то она должна пересекать третью сферу еще в одной точке, которая также принадлежит всем трем сферам.

49. Докажем сначала следующую лемму: *среди всех треугольников, вписанных в окружность, наибольшей площадью обладает равносторонний треугольник.*

Предположим, что треугольник  $ABC$ , обладающий наибольшей площадью среди всех вписанных в данную окружность треугольников (рис. 69), не равносторонний. Тогда у треугольника  $ABC$  имеются по крайней мере две неравные стороны. Пусть, например,  $AB \neq AC$ . Построим треугольник  $A'BC$ , вершина  $A'$  которого совпадает с тем из концов диаметра, перпендикулярного отрезку  $BC$ , который лежит по ту же сторону от прямой  $BC$ , что и точка  $A$ . Площадь треугольника  $A'BC$  больше площади треугольника  $ABC$ , поскольку оба треугольника имеют одно и то же основание  $BC$ , а высота треугольника  $A'BC$  больше высоты треугольника  $ABC$ . Действительно,  $A'F = A'O + OF$ ,  $AE = AD + DE$ , но  $OF = DE$ , а  $A'O > AD$ . Полученное противоречие доказывает, что треугольник с наибольшей средн

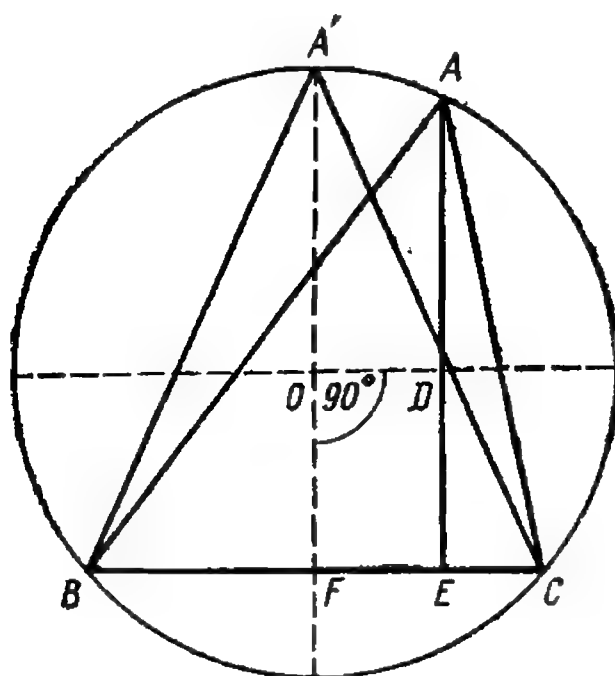


Рис. 69.

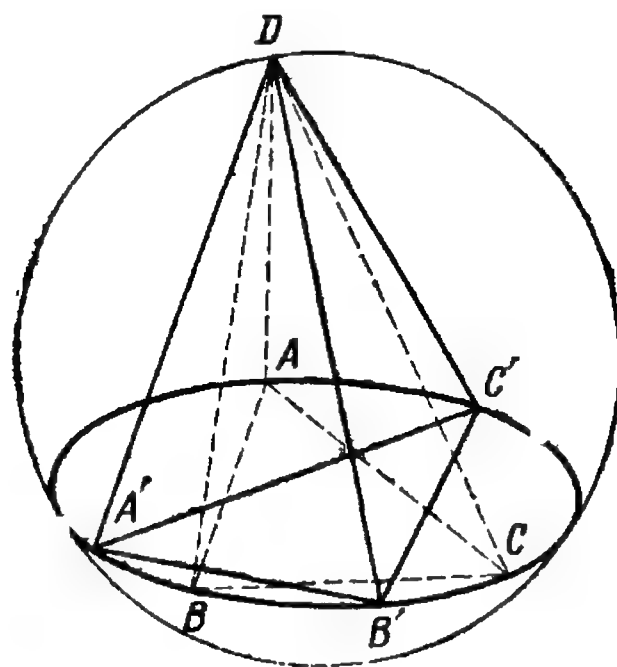


Рис. 70.

всех вписанных в данную окружность треугольников площадью должен быть равносторонним. Лемма доказана.

Переходим к доказательству основного утверждения. Предположим, что существует тетраэдр  $ABCD$ , который, не будучи правильным, тем не менее имеет наибольший объем среди всех тетраэдров, вписанных в данную сферу (рис. 70). Среди граней тетраэдра  $ABCD$  найдется по крайней мере одна, форма которой будет отлична от равностороннего треугольника. Пусть, например, треугольник  $ABC$  не равносторонний. Вообразим тетраэдр  $A'B'C'D$ , основанием которого служит любой равносторонний треугольник, вписанный в ту же окружность, что и треугольник  $ABC$ . По лемме площадь треугольника  $A'B'C'$  больше площади треугольника  $ABC$ , а поскольку тетраэдры  $ABCD$  и  $A'B'C'D$  имеют одинаковую высоту, то объем тетраэдра  $A'B'C'D$  вопреки предположению больше объема тетраэдра  $ABCD$ . Итак, среди всех тетраэдров, вписанных в данную сферу, наибольшим объемом обладает правильный тетраэдр, что и требовалось доказать.

50. Условиям задачи удовлетворяют четыре прямые, изображенные на рис. 71. Три из них содержат ребра куба  $DC$ ,  $BB'$ ,  $A'D$ , а четвертая — прямая  $KL$  — проходит через середины противоположных ребер куба  $AA'$  и  $CC'$ . Нетрудно видеть, что четыре перечисленные прямые не параллельны и не пересекаются (эти факты без труда доказываются с помощью аналитической геометрии, но мы примем их без доказательства). Покажем, что никакая пятая прямая не пересекает все четыре прямые.

Введем систему прямоугольных координат так, как показано на рис. 71. За единицу длины (одинаковую для всех трех осей) примем половину длины ребра куба. Предположим, что существует пятая прямая, пересекающая четыре проведенные ранее прямые в точках  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $S$ , где точка  $P$  лежит на прямой  $DC$ , точка  $Q$  — на прямой  $BB'$ , точка  $R$  — на прямой  $A'D$  и точка  $S$  — на прямой  $KL$ . Точки пересечения имеют следующие координаты:  $P(x, 0, 0)$ ,  $Q(2, 2, z)$ ,

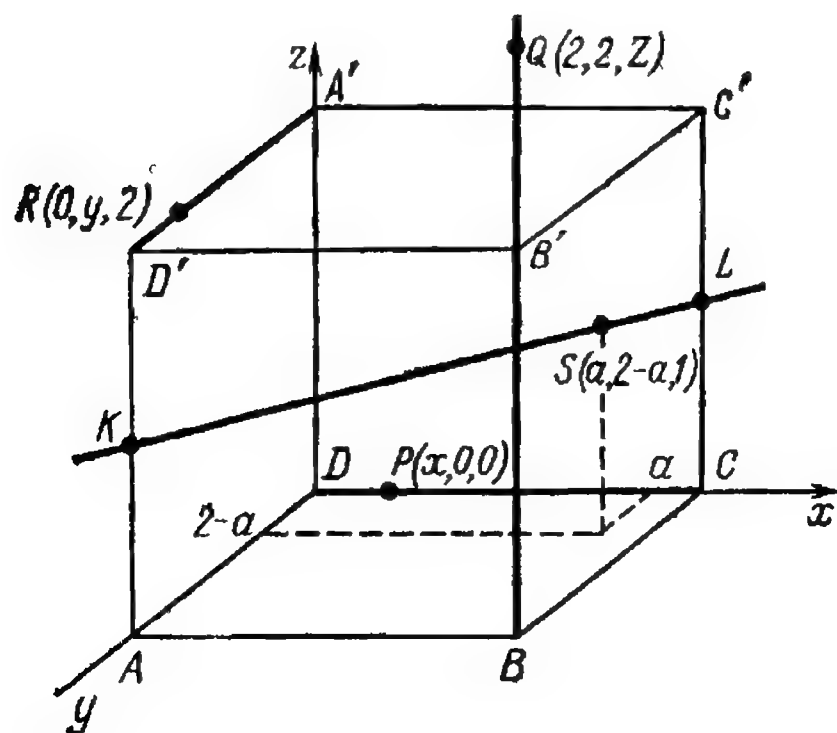


Рис. 71.

$R(0, y, z)$ ,  $S(a, 2 - a, 1)$ . Поскольку точки  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $S$  лежат на одной прямой, векторы  $\overrightarrow{PQ} [2 - x, 2, z]$ ,  $\overrightarrow{PR} [-x, y, 2]$ ,  $\overrightarrow{PS} [a - x, 2 - a, 1]$  коллинеарны, откуда

$$\frac{2 - x}{-x} = \frac{2}{y} = \frac{z}{2}, \quad (1)$$

$$\frac{a - x}{-x} = \frac{2 - a}{y} = \frac{1}{2}. \quad (2)$$

Из (2) следует, что

$$y = 4 - 2a, \quad (3)$$

$$x = 2a. \quad (4)$$

Подставляя (3) и (4) в (1), получаем

$$\frac{2 - 2a}{-2a} = \frac{2}{4 - 2a}$$

или квадратное уравнение

$$a^2 - 2a + 2 = 0,$$

дискриминант которого меньше нуля. Таким образом, система уравнений (1) и (2) не имеет вещественного решения. Следовательно, точки  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  и  $S$  не могут лежать на одной прямой.

51. Рассмотрим куб  $ABCD A' B' C' D'$  (рис. 72) и проведем из вершины  $A$  отрезки  $AB'$ ,  $AC'$ ,  $AD'$  и  $AC$ . Мы получим 3 пирамиды:  $AA' B' C' D'$ ,  $ABB' C' C$  и  $ADD' C' C$  (первая из них изображена отдельно на рис. 73). Эти пирамиды попарно равны. Действительно, возьмем, например, пирамиды  $AA' B' C' D'$  и  $ABB' C' C$ . Их высоты  $AA'$  и  $BB'$  так же, как и их основания  $A' B' C' D'$  и  $BB' C' C$ , равны. Совместим основания пирамид  $AA' B' C' D'$  и  $ABB' C' C$  так, чтобы вершина  $A'$  первой из них совпала с вершиной  $B$  второй пирамиды,  $B'$  — с  $C$ ,  $C'$  — с  $C'$  и  $D'$  с  $B'$ . Тогда ребра  $AA'$  и  $AB$  пирамид совпадут. Нетрудно видеть, что аналогичное утверждение справедливо и относительно других пар боковых ребер пирамид.

Плоскость  $AA' C'$  делит пирамиду  $AA' B' C' D'$  на две треугольные пирамиды, каждая из которых служит зеркальным отражением другой относительно плоскости  $AA' C'$ . Проведя плоскости симметрии

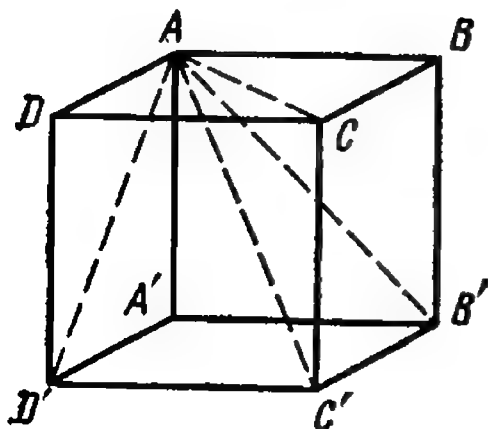


Рис. 72.

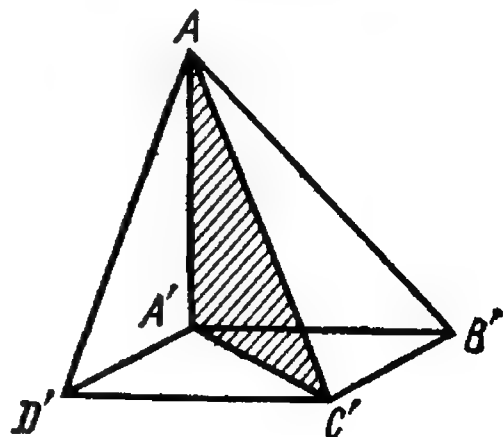


Рис. 73.

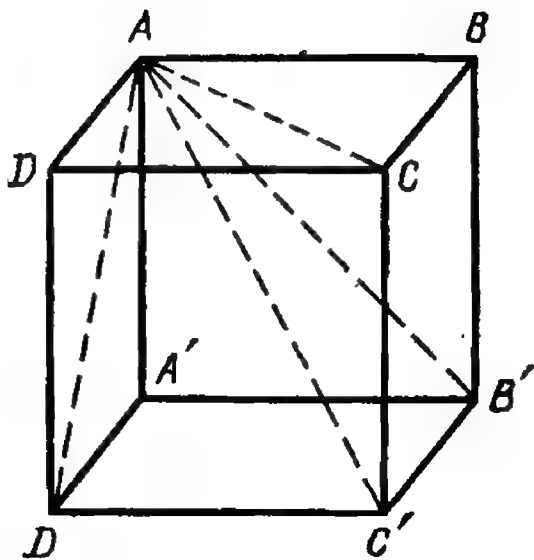


Рис. 74.

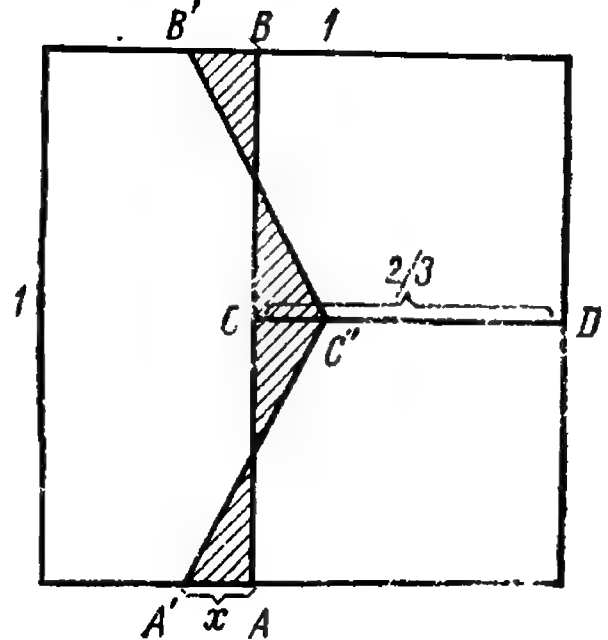


Рис. 75.

$ABC'$  и  $ADC'$  двух других четырехугольных пирамид, мы получим, как нетрудно проверить, искомое разбиение куба  $ABCD A'B'C'D'$  на 6 четырехгранников, из которых три конгруэнтны, а остальные три переходят в первые при зеркальном отражении.

52. Рассмотрим проволочную модель куба  $ABCD A'B'C'D'$  и проведем в ней из вершины  $A$  отрезки  $AB'$ ,  $AC'$ ,  $AD'$  и  $AC$  (рис. 74). При этом мы получим три проволочные модели пирамид  $AA'B'C'D'$ ,  $ABB'C'C$  и  $ADD'C'C$ . Первую модель можно дополнить до полной пирамиды требуемым способом, соединяя каждую точку ребра  $AA'$  с каждой точкой ребра  $B'C'$  и с каждой точкой ребра  $C'D'$ . Аналогично можно поступить и с двумя остальными моделями пирамид: во второй модели мы соединим каждую точку ребра  $AB$  с каждой точкой ребра  $B'C'$  и с каждой точкой ребра  $CC'$ , в третьей модели соединим каждую точку ребра  $AD$  с каждой точкой ребра  $C'D'$  и каждой точкой ребра  $CC'$ . Описанный способ дополнения модели «скелета» куба до модели телесного куба отвечает условиям задачи, поскольку, дополняя модели пирамид, мы проводили отрезки, которые соединяют лишь точки, принадлежащие ребрам куба.

53. Разделив квадратный участок на три прямоугольника отрезками  $AB$  и  $CD$  так, как показано на рис. 75, получим общую протяженность границ раздела, равную  $\frac{5}{3}$ .

Разделим теперь квадратный участок линиями  $A'C'B'$  и  $C'D$  так, чтобы  $AA' = CC' = BB' = x$ . Ясно, что при этом площадь каждой из трех частей не изменится.

Исследуем, при каких значениях  $x$  общая протяженность границы раздела будет меньше  $\frac{5}{3}$ .

Чтобы ответить на этот вопрос, необходимо решить неравенство (рис. 75)

$$2\sqrt{(2x)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{2}{3} - x < \frac{5}{3}.$$

Преобразуя его, находим

$$4\left(4x^2 + \frac{1}{4}\right) < (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1,$$

$$15x^2 - 2x < 0,$$

откуда

$$0 < x < \frac{2}{15}.$$

Обозначим общую протяженность границ в рассматриваемом нами классе разделов квадратного участка через  $L(x)$ . Тогда

$$L(x) = \sqrt{16x^2 + 1} + \frac{2}{3} - x.$$

Функция  $L(x)$  достигает минимума, равного

$$L_{\min} = \frac{2}{3} + \frac{\sqrt{15}}{4} \approx 1,635 < \frac{5}{3},$$

при

$$x = \frac{\sqrt{15}}{60}.$$

54. Пусть  $O$  — точка, из которой выходят четыре луча, образующие друг с другом один и тот же угол (рис. 76). Отложив на этих лучах отрезки  $OA = OB = OC = OD$ , построим правильный тетраэдр  $ABCD$ . Точка  $O$  — центр сферы, описанной вокруг тетраэдра. Продолжим отрезок  $OD$  до пересечения с плоскостью  $ABC$  и обозначим точку пересечения  $D_1$ . Точка  $D_1$  — центр равностороннего треугольника  $ABC$ , а отрезок  $DD_1$  — высота тетраэдра  $ABCD$ . По свойству правильного тетраэдра  $D_1O = \frac{1}{3}OD$ . Следовательно,

$$\cos(\angle D_1OB) = \frac{D_1O}{OB} = \frac{D_1O}{OD} = \frac{1}{3}, \quad \cos(\angle BOD) = -\frac{1}{3},$$

откуда

$$\angle BOD = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right).$$

Если бы в трехмерном пространстве нашлось пять лучей, выходящих из одной и той же точки и образующих друг с другом один и тот же угол, то, повторяя только что проведенные построения, мы бы получили правильный многогранник с пятью вершинами, а такого не существует.

55. Воспользовавшись тем, что  $ABCDE$  — правильный пятиугольник (рис 77), получим

$$AM = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{5}} = AB,$$

где  $M$  — центр пятиугольника  $ABCDE$ .

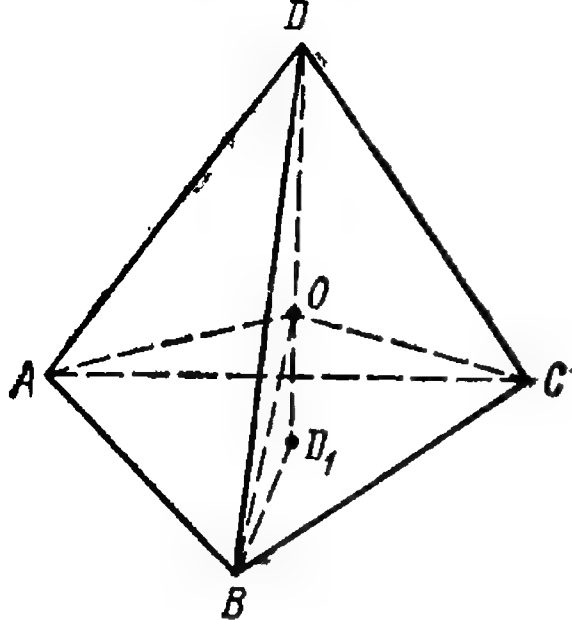


Рис. 76.

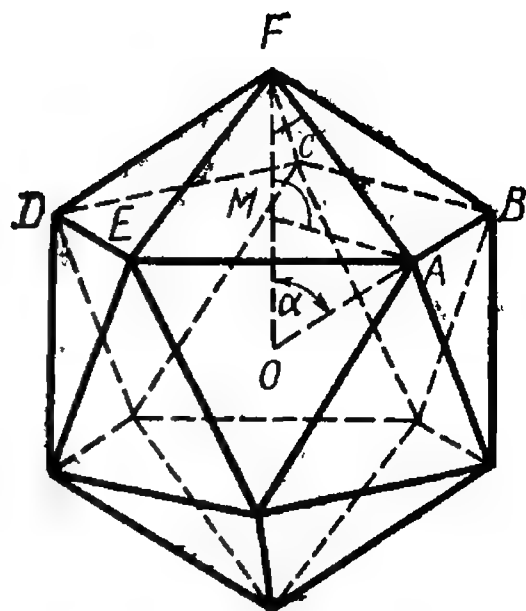


Рис. 77.

Из треугольника  $AFM$  (поскольку  $\angle AMF = 90^\circ$ ) можно вычислить  $\angle AFM$ :

$$\sin(\angle AFM) = \frac{AM}{AF} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5 - \sqrt{5}}}, \quad (AB = AF).$$

Теперь уже нетрудно вычислить искомый угол ( $\angle AOF = \alpha$ ), образуемый радиусами  $OA$  и  $OF$  сферы, описанной вокруг двадцатигранника. Действительно,  $\angle AFO = 90^\circ - \alpha/2$ , откуда

$$\sin(\angle AFM) = \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5 - \sqrt{5}}} \quad \text{и} \quad \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Следовательно,

$$\alpha = \arccos \frac{1}{\sqrt{5}} = \arccos 0,4472 = 43^\circ 26'.$$

**56.** Искомое отношение  $k$  равно отношению телесного угла, высекаемого на сфере тетраэдром, и остальной части сферы.

Вычислим величину трехгранного угла правильного тетраэдра. Для простоты рассмотрим трехгранный угол, вершина которого совпадает с точкой  $C$ . Пусть  $r$  — радиус сферы. Проведя плоскости через каждые два ребра трехгранного угла, получим на поверхности сферы равносторонний сферический треугольник  $MNP$  (рис. 78). Каждый из углов  $\varphi$  этого сферического треугольника равен двугранному углу тетраэдра, следовательно,  $\varphi = \arccos \frac{1}{3} \approx 0,39$ . Продолжения сторон сферического треугольника  $MNP$  образуют 6 сферических двугульников, из которых 3 имеют общий сферический треугольник

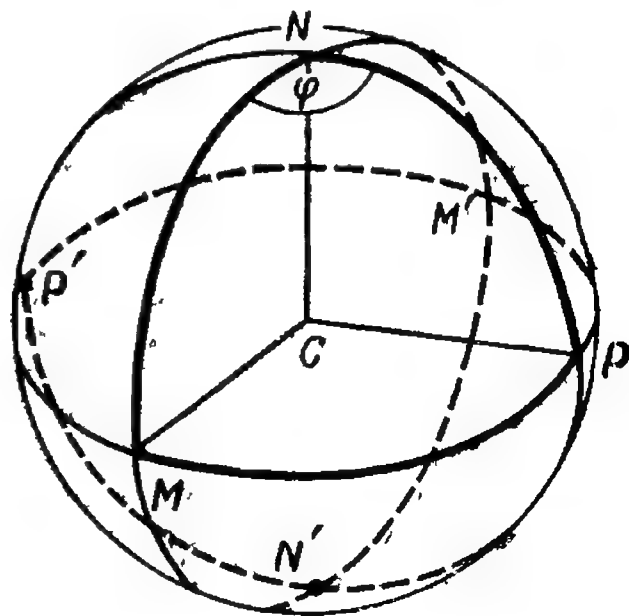


Рис. 78.

$MNP$ , а 3 остальные — общий сферический треугольник  $M'N'P'$ . Площадь каждого из 6 сферических двугульников составляет  $2\varphi r^2 = = 2r^2 \arccos \frac{1}{3}$ . Три двугульника, имеющие общий треугольник (какой именно,  $MNP$  или  $M'N'P'$ , не существенно), занимают половину сферы. Следовательно, если обозначить через  $x$  площадь треугольника  $MNP$ , то

$$3 \cdot 2\varphi r^2 - 2x = 2\pi r^2,$$

откуда

$$x = (3\varphi - \pi) r^2 = \left(3 \arccos \frac{1}{3} - \pi\right) r^2 \approx 0,17\pi r^2.$$

Таким образом, интересующее нас отношение

$$k = \frac{4\pi - \left(3 \arccos \frac{1}{3} - \pi\right)}{3 \arccos \frac{1}{3} - \pi} = \frac{5\pi - 3 \arccos \frac{1}{3}}{3 \arccos \frac{1}{3} - \pi} \approx 21,8.$$

57. Первым взвешиванием сравним любые 2 из 5 данных предметов. Пусть  $A$  — более легкий, а  $B$  — более тяжелый предмет. Тогда результат первого взвешивания запишем в виде

$$A < B$$

(читается: « $A$  легче  $B$ »). Затем сравним два других предмета и обозначим более легкий  $D$ , а более тяжелый —  $E$ :

$$D < E.$$

Пятый предмет обозначим  $C$ .

Третьим взвешиванием сравним предметы  $B$  и  $E$ . Обе возникающие здесь возможности приводят к аналогичным рассуждениям, поэтому мы ограничимся рассмотрением случая  $B < E$ . В итоге после трех взвешиваний мы знаем, что

$$A < B < E \text{ и } D < E.$$

Четвертым взвешиванием сравним пятый предмет  $C$  с предметом  $B$ . Необходимо различать два случая: а)  $B < C$ ; б)  $C < B$ .

В первом случае ( $B < C$ )

$$A < B < E, \quad D < E \text{ и } B < C.$$

Сравним (для этого понадобится пятое взвешивание) предметы  $C$  и  $E$ . Здесь также необходимо различать два возможных случая:  $E < C$  или  $C < E$ .

Если  $A < B < E < C$ , то место предмета  $D$ , более легкого, чем  $E$ , можно определить, сравнив  $A$  с  $D$  и  $B$  с  $D$ . Таким образом, для полного упорядочения пяти предметов по весу в этом случае необходимо произвести 7 взвешиваний.

В случае  $A < B < C < E$  для определения места  $D$  также достаточно произвести два взвешивания, а именно: сначала сравнить  $D$  с  $B$ , а затем в зависимости от результата взвешивания сравнить  $D$  либо с  $A$ , либо с  $C$ . В итоге мы снова производим 7 взвешиваний.

Во втором случае ( $C < B$ )

$$A < B < E, \quad C < B \text{ и } D < E.$$



Сравним предметы  $A$  и  $C$  (пятое взвешивание). В обоих возможных случаях ( $A < C < B$  или  $C < A < B < E$ ) для определения места предмета  $D$ , о котором уже известно, что он легче предмета  $E$ , достаточно двух взвешиваний. Следовательно, и в случае, когда  $C < B$ , семи взвешиваний достаточно, чтобы расположить предметы в порядке возрастания их веса.

Поскольку мы исчерпали все возможные случаи, то доказательство на этом заканчивается.

Можно доказать следующее более общее утверждение: для того чтобы расположить  $n$  предметов ( $n \geq 2$ ) в порядке убывания веса, достаточно произвести  $d_n = 1 + nk - 2^k$  взвешиваний, где  $k$  — натуральное число, удовлетворяющее неравенству  $2^{k-1} < n \leq 2^k$ .

58. Первое решение. Обозначим через  $a$ ,  $b$  и  $c$  доли общего запаса табаку, которые выкуривают за день Адам, Богдан и Вацлав. Тогда

$$a + b = \frac{1}{30}, \quad a + c = \frac{1}{15}, \quad b + c = \frac{1}{12}.$$

Складывая правые и левые части всех трех уравнений, получаем  $a + b + c = \frac{11}{120}$ . Комбинируя последнее уравнение по очереди с каждым из трех ранее выписанных уравнений, находим  $a = \frac{1}{120}$ ,  $b = \frac{3}{120}$ ,  $c = \frac{7}{120}$ . Таким образом, всем трем курильщикам табаку хватит на  $1 : (\frac{1}{120} + \frac{3}{120} + \frac{7}{120}) = \frac{120}{11}$  дней. Чтобы вычислить, сколько каждый из них должен заплатить за табак, достаточно разделить 120 злотых на три части, относящиеся между собой, как  $1 : 3 : 7$ .

Второе решение. Ту же задачу можно решить проще. Предположим, что Адам, Богдан и Вацлав выкуривают за день табаку на  $x$ ,  $y$  и  $z$  злотых.

Нетрудно видеть, что

$$x + y = 4, \quad x + z = 8, \quad y + z = 10.$$

Решая эту систему уравнений, находим  $x = 1$ ,  $y = 3$ ,  $z = 7$ .

Таким образом, всем трем курильщикам табаку хватит на  $120 : (1 + 3 + 7) = 120 : 11$  дней, а стоимость пачки они должны разделить между собой в отношении  $1 : 3 : 7$ .

59. Предположим, что валики по полу и рельс по валикам катятся без проскальзывания. Тогда условия задачи можно схематически изобразить так, как показано на рис. 79.

Если бы валики вращались таким образом, что их оси оставались бы на месте, то за один оборот валиков рельс перемещался бы

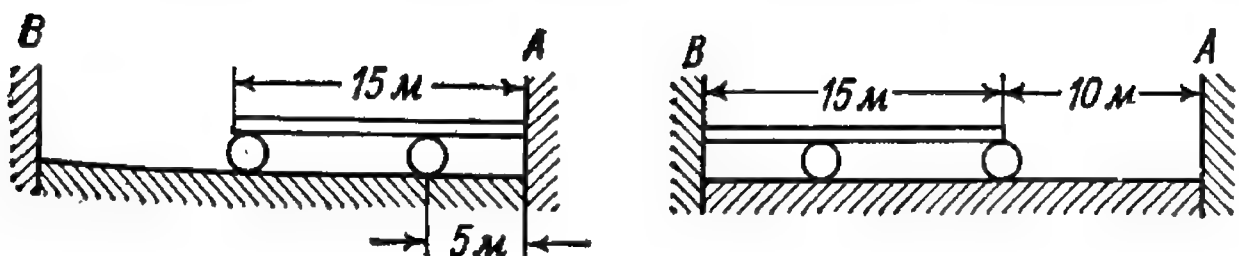


Рис 79.

от стены  $A$  к стене  $B$  на расстояние, равное длине окружности поперечного сечения валика. Однако сам валик также катится к стене  $B$  и за один оборот проходит расстояние, равное длине окружности своего поперечного сечения. Таким образом, конец рельса упирается в стену  $A$ , когда рельс проходит расстояние  $2,5$  м. Поскольку длина рельса составляет  $15$  м, ширина фабричного цеха равна  $25$  м.

**60.** Предположим, что играют  $n$  участников. Обозначим оценки, выставленные отдельными участниками,  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$ . Пусть  $a = \max(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$ .

Допустим, что участники с номерами  $1, 2, \dots, n-2$  играют честно, то есть стараются как можно точнее ответить на поставленный вопрос, а участники с номерами  $n-1$  и  $n$  находятся в сговоре. В этом случае при сильно завышенной оценке  $a_{n-1}$  будет выполняться неравенство

$$a_{n-1} > a.$$

Для выигрыша участников сговора достаточно, чтобы второй из них назвал оценку

$$a_n \geq (n-1) a_{n-1}.$$

Действительно, при такой оценке среднее арифметическое  $S$  оценок всех участников игры удовлетворяет неравенству

$$S = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n}{n} > \frac{a_{n-1} + (n-1) a_{n-1}}{n} = a_{n-1}.$$

Поскольку  $a_{n-1} > a$ , то

$$a < a_{n-1} < S,$$

откуда после несложных преобразований получаем

$$0 < S - a_{n-1} < S - a.$$

Последнее неравенство означает, что если оценка  $a_n$  не выигрывает, то по определению числа  $a$  выигрывает оценка  $a_{n-1}$ .

Для уменьшения опасности такого сговора правила вроцлавской игры можно изменить следующим образом: из оценок  $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n$  исключать две наивысшие, а затем вычислять среднее арифметическое остальных  $(n-2)$  оценок и, сравнив с полученным значением все  $n$  оценок, устанавливать, какая из них оказалась наиболее точной.

**61.** Предположим, что изображение страны на глобусе лежит между параллелями, плоскости которых пересекают ось  $x$  (общую ось симметрии таза и глобуса, проходящую через точку их касания) в точках  $a$  и  $b$  (рис. 80). Если интервал  $\Delta x$  достаточно мал, то фигуры  $DEFG$  и  $D'E'F'G'$  можно считать элементами сферических поясов, ограниченных меридианами (рис. 81). Тогда площади фигур  $DEFG$  и  $D'E'F'G'$  можно представить в виде

$$S_{DEFG} = \frac{2\pi r \varphi(x)}{2} = r \varphi(x) \Delta x,$$

$$S_{D'E'F'G'} = \frac{2\pi R \varphi(x) \Delta x}{2} = R \varphi(x) \Delta x,$$

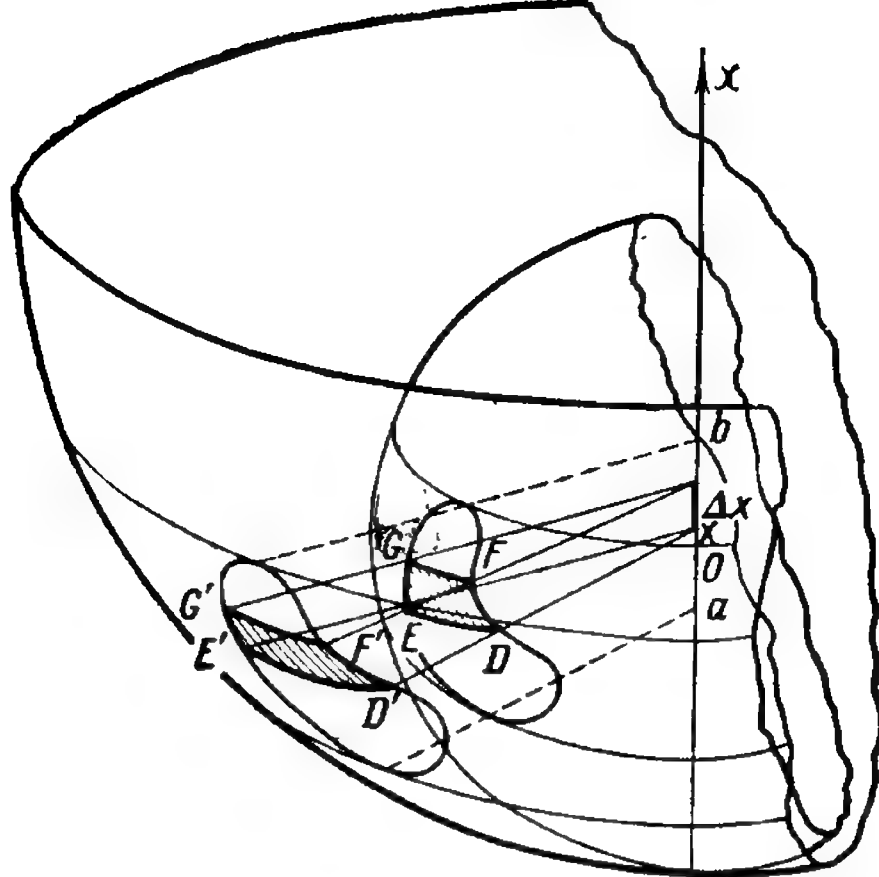


Рис. 80

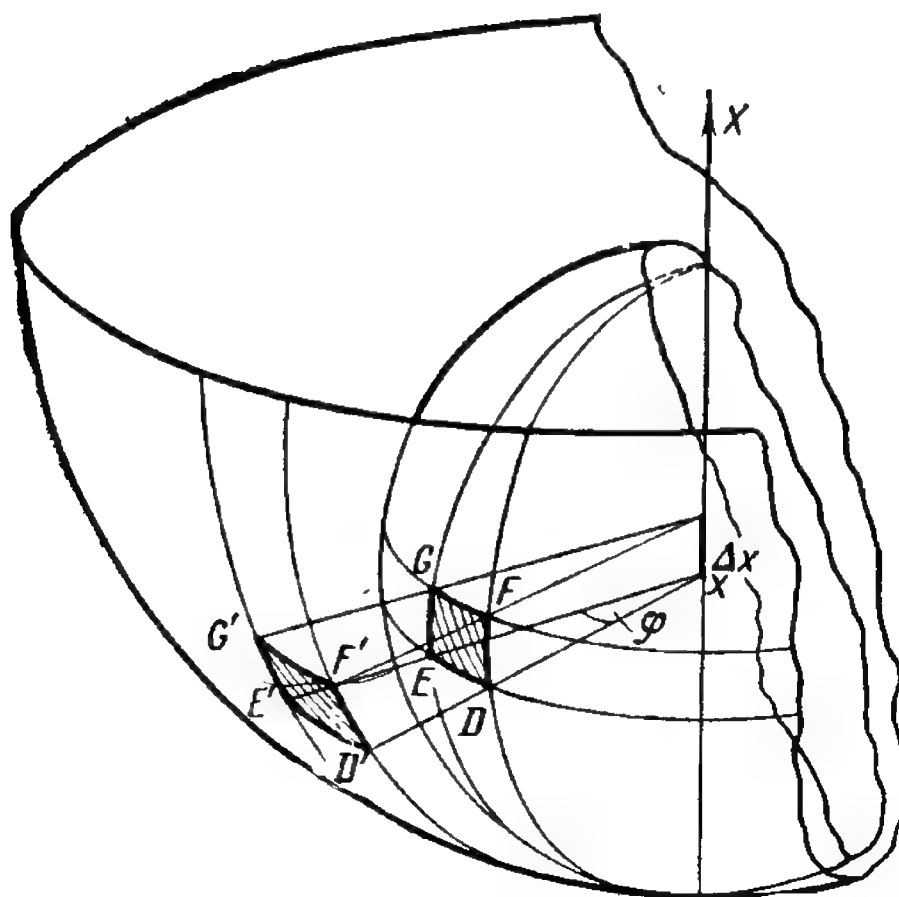


Рис. 81.

где  $r$  и  $R$  — соответственно радиусы глобуса и таза, а  $\varphi(x) = \angle D_x E = \angle D'_x E'$  — функция от  $x$ , определенная на интервале оси  $x$  от  $a$  до  $b$ .

Площадь  $P'$  страны, спроецированной на таз, получим, проинтегрировав выражение  $R\varphi(x)\Delta x$  (площадь элемента поверхности) по  $x$  от  $a$  до  $b$ , а площадь  $P$  изображения той же страны на глобусе — проинтегрировав выражение  $r\varphi(x)\Delta x$  по  $x$  в тех же пределах:

$$P' = \int_a^b R\varphi(x) dx = R \int_a^b \varphi(x) dx, \quad P = \int_a^b r\varphi(x) dx = r \int_a^b \varphi(x) dx.$$

Поскольку в обоих случаях под знаком интеграла стоит одна и та же функция, то оба интеграла равны и

$$P'/P = R/r.$$

То же отношение площадей получим для любой страны на глобусе и ее проекции на таз.

62. Ясно, что куб, в вершинах которого располагаются узлы сетки, можно рассматривать как вписанный в максимальную сферу. Рассечем сферу плоскостью, проходящей через параллельные ребра куба, не принадлежащие одной грани (рис. 82). В результате мы получим сечение сферы — большой круг — и сечение куба, имеющее вид прямоугольника со сторонами  $a$  и  $a\sqrt{2}$ . Поскольку кратчайшая линия, соединяющая две точки на сфере, есть дуга большого круга, то шнурок, соединяющий узлы  $A$  и  $B$ , должен совпадать с дугой  $AB$  большого круга, лежащей в плоскости проведенного нами сечения. Вычислим радиус большого круга. Пусть  $\alpha$  — угол между диагоналями  $AC$  и  $BD$ , опирающийся на дугу  $AB$ . Тогда  $\operatorname{tg} \alpha/2 = 1/\sqrt{2}$ , откуда  $\alpha = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} (1/\sqrt{2})$ . Поскольку длина дуги  $AB$  составляет 10 см, то из соотношения  $\alpha = \overset{\frown}{AB}/r$ , где  $r$  — радиус сферы, находим

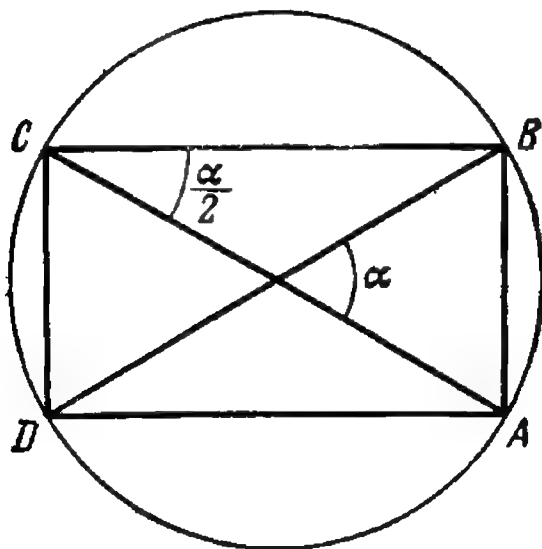


Рис. 82.

$$r = \frac{10}{2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{2}}},$$

откуда

$$\begin{aligned} V &= \frac{4}{3} \pi \left( \frac{10}{2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{2}}} \right)^3 = \\ &= \frac{500\pi}{3 \left( \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{2}} \right)^3} \approx 2245 \text{ см}^3. \end{aligned}$$

63. Положение кораблей в момент получения приказа схематически изображено на рис 83.

Забудем на миг о корабле  $B$  и поразмыслим над тем, как должны двигаться корабли  $A$  и  $C$ , чтобы за кратчайшее время прийти в одну точку океана. Ясно, что корабли должны держать курс прямо друг на друга, то есть двигаться вдоль прямой  $AC$ . Встреча произойдет в точке  $D$ , причем

$$AD : CD = v_A : v_C.$$

Докажем, что корабль  $B$  приходит в точку  $D$  еще до прибытия в нее кораблей  $A$  и  $C$ . Тем самым будет доказано, что местом сбора кораблей в океане должна быть точка  $D$ .

Имеем:

$$AD : CD = v_A : v_C, \quad AD + CD = AC.$$

Рис. 83.

Решая эти уравнения относительно  $AD$  и  $CD$ , находим

$$AD = \frac{v_A}{v_A + v_C} AC, \quad CD = \frac{v_C}{v_A + v_C} AC.$$

Следовательно, корабли  $A$  и  $C$  встречаются через

$$t = \frac{AD}{v_A} = \frac{AC}{v_A + v_C}$$

после получения приказа.

За это время корабль  $B$  мог бы пройти расстояние, равное

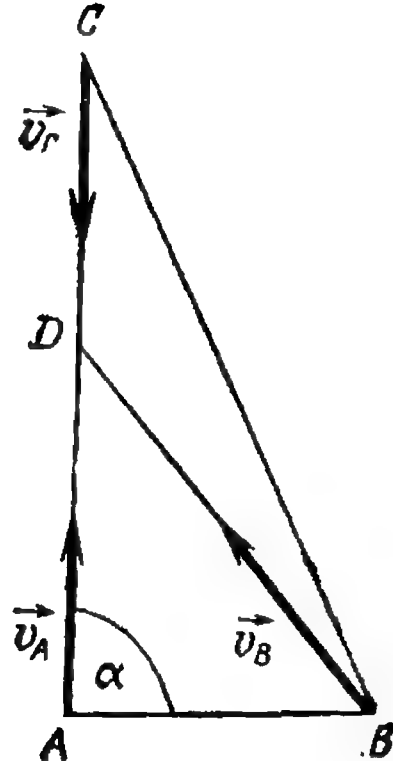
$$\frac{AC}{v_A + v_C} v_B.$$

Для решения задачи достаточно доказать, что

$$BD < \frac{v_B}{v_A + v_C} AC. \quad (1)$$

Из треугольника  $ABC$ , воспользовавшись теоремой косинусов, получим

$$\cos \alpha = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC}.$$



Из треугольника  $ABD$  находим

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos \alpha =$$

$$\begin{aligned} &= AB^2 + \frac{v_A^2}{(v_A + v_C)^2} AC^2 - 2AB \frac{v_A}{v_A + v_C} AC \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \\ &= AB^2 \left(1 - \frac{v_A}{v_A + v_C}\right) + AC^2 \frac{v_A}{v_A + v_C} \left(\frac{v_A}{v_A + v_C} - 1\right) + \\ &+ \frac{v_A}{v_A + v_C} BC^2 = \frac{v_C}{v_A + v_C} AB^2 + \frac{v_A}{v_A + v_C} BC^2 - \frac{v_A v_C}{(v_A + v_C)^2} AC^2. \end{aligned}$$

Нам необходимо доказать, что выполняется неравенство (1), или

$$\frac{v_C}{v_A + v_C} AB^2 + \frac{v_A}{v_A + v_C} BC^2 - \frac{v_A v_C}{(v_A + v_C)^2} AC^2 < \frac{v_B^2}{(v_A + v_C)^2} AC^2.$$

Разделив обе части последнего неравенства на  $\frac{v_B^2}{(v_A + v_C)^2} AC^2$ , получим

$$\frac{v_C (v_A + v_C)}{v_B^2} \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 + \frac{v_A (v_A + v_C)}{v_B^2} \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 - \frac{v_A v_C}{v_B^2} < 1. \quad (2)$$

Подставляя в левую часть неравенства числовые данные задачи, убеждаемся, что требуемое неравенство соблюдается:

$$\begin{aligned} &\frac{12 \cdot (15 + 12)}{20^2} \left(\frac{100}{200}\right)^2 + \frac{15 \cdot (15 + 12)}{20^2} \left(\frac{220}{200}\right)^2 - \frac{15 \cdot 12}{20^2} = \\ &= \frac{12 \cdot 27}{20^2 \cdot 4} + \frac{18 \cdot 27 \cdot 11^2}{20^2 \cdot 10^2} - \frac{15 \cdot 12}{20^2} = \frac{81 \cdot 20 + 81 \cdot 11^2 - 15 \cdot 12 \cdot 20}{20^3} = \\ &= \frac{1620 + 9801 - 3600}{20^3} = \frac{7821}{8000} < 1. \end{aligned}$$

Итак, корабли  $A$  и  $C$  должны следовать вдоль прямой  $AC$ , а корабль  $B$  — держать курс на точку их встречи  $D$ . Прибыв в  $D$  раньше кораблей  $A$  и  $C$ , корабль  $B$  ожидает их прибытия в «район сосредоточения».

64. Задача о фальшивой монете принадлежит к числу тех задач, которые можно решать методами теории информации\*. Мы бы хотели здесь лишь отметить, что 2 — наименьшее число взвешиваний, позволяющее (в условиях задачи) определить фальшивую монету.

\* Читателям, которых интересуют эти методы, можно порекомендовать книгу: А. М. Яглом и И. М. Яглом, Вероятность и информация, изд. 3-е, перераб. и доп., М, изд-во «Наука», 1973.

Действительно, наименьшее число взвешиваний  $k$  связано с числом всех монет  $N$  формулой

$$k = \left[ \frac{\log(2N + 1)}{\log 3} \right]^*,$$

где  $[x]$  означает «целую часть» числа  $x$ , то есть наибольшее из целых чисел, не превосходящих  $x$ . В интересующем нас случае  $N = 4$ , следовательно,  $k = 2$ .

Перейдем к решению задачи. Обозначим монеты  $A, B, C$  и  $D$ , а их вес —  $a, b, c$  и  $d$ . При первом взвешивании на одну чашу весов положим монеты  $A$  и  $B$ , а на другую —  $C$  и пятиграммовую гирьку.

Возможны два случая:

1. Чаши окажутся в равновесии. Следовательно,  $a + b = c + 5$ , и фальшивой должна быть монета  $D$ . Положив при втором взвешивании ее на одну чашу весов, а гирьку или любую из трех остальных монет — на другую, мы сможем установить, в какую сторону от нормы отклоняется ее вес: вверх или вниз.

2. Чаши весов не находятся в равновесии. Следовательно,  $a + b \neq c + 5$ , и монета  $D$  — полновесная, а фальшива одна из монет  $A, B, C$ . При втором взвешивании положим монету  $A$  на одну чашу весов, а монету  $B$  — на другую. Равновесие ( $a = b$ ) будет означать, что фальшивой является монета  $C$ , причем, если при первом взвешивании  $a + b > c + 5$ , то она легче полновесных, а если  $a + b < c + 5$ , то тяжелее. Отсутствие равновесия ( $a \neq b$ ) будет означать, что фальшивой является  $A$  или  $B$ . Если  $a + b < c + 5$  и  $a < b$ , то фальшива (легче полновесной) монета  $A$ . Если  $a + b < c + 5$  и  $a > b$ , то фальшива (и также легче полновесной) монета  $B$ . Если  $a + b > c + 5$  и  $a > b$ , то фальшива (но на этот раз тяжелее полновесной) монета  $A$ . Если же, наконец,  $a + b > c + 5$  и  $a < b$ , то фальшива (и также тяжелее полновесной) монета  $B$ .

65. Пусть  $G$  означает любую дорожную сеть, связывающую четыре данных города. Сеть  $G$  можно рассматривать как граф\*\*, вершины которого соответствуют городам и развилкам, а ребра — отрезкам дорог между вершинами.

Предположим, что дорожная сеть  $G$  имеет  $i + 2$  развилки. Пусть  $n$  и  $m$  означают число вершин и ребер графа  $G$ . Тогда

$$n = 6 + i.$$

Поскольку из каждого города выходит по крайней мере одно ребро графа, а из каждой развилки — по крайней мере 3 ребра, то справедливо неравенство

$$m \geq \frac{1}{2} [4 + 3(i + 2)] = 5 + \frac{3}{2} i.$$

Граф  $G$  связан. Введем новое обозначение:

$$\nu(G) = m - n + 1.$$

\* Основание логарифмов не существенно, поскольку  $k$  зависит от их отношения. — Прим. перев.

\*\* См., например, книгу: К. Б е р ж, Теория графов и ее приложения, ИЛ, М., 1962. — Прим. перев.



Из выписанного выше неравенства и соотношения  $n = 6 + 1$  следует, что  $v(G) \geq i/2$ . Это означает\*, что если у  $G$  имеется более двух точек ветвления (развилок дорог), то  $G$  содержит замкнутую петлю. Но сеть, содержащая замкнутую петлю, не удовлетворяет требованию минимальности затрат на ее строительство, ибо, отбросив одно из ребер графа (разорвав петлю), мы получим гораздо более экономичную дорожную сеть, связывающую те же четыре города.

**66.** Наибольшей производительности достигли: на I машине — швея  $C$ , на II машине — швея  $E$  и на V машине — швея  $D$ .

Швею  $C$  можно было бы также принять, поручив ей работать на III машине (производительность ее составила бы 12 злотых), но тогда I машину следовало бы отдать швее  $D$  (производительность 11 злотых), но при этом портной из-за изменения производительности швей, работающей на I машине, потерял бы  $15 - 11 = 4$  злотых. Поэтому ему выгоднее посадить за III машину швею  $F$  (производительность 11 злотых), при этом он потеряет на III машине лишь  $12 - 11 = 1$  злотый.

Наивысшей производительности на IV машине достигла все та же швея  $C$ . Однако, рассуждая так же, как при рассмотрении III машины, нетрудно показать, что IV машину выгоднее всего отдать швее  $G$ .

Так мы приходим к следующему распределению принятых швей по машинам:

$$I - C, \quad II - E, \quad III - F, \quad IV - G, \quad V - D.$$

Производительность мастерской при этом составляет  $15 + 10 + 11 + 10 + 14 = 60$  злотых, что ненамного меньше той, которая была бы достигнута, если бы на машинах III и IV работали швеи с производительностью швей  $C$  (в этом случае производительность составляла бы 62 злотых).

**67.** Задача относится к числу так называемых задач о встрече движений, выделенных в настоящее время в специальный раздел теории игр.

Мы приводим два решения: первое полностью элементарно, второе использует простейшие методы теории дифференциальных уравнений. Сопоставление столь различных методов будет небезынтересным и заведомо полезным для некоторых читателей.

**Первое решение.** Стратегия, позволяющая контрабандисту вырваться из западни, может, например, состоять в том, что он будет все время направлять лодку по прямой, проходящей через середину любой из сторон правильного шестиугольника, в вершинах которого в начальный момент располагались полицейские катера.

Пусть  $O$  — центр шестиугольника, в котором находится лодка контрабандиста, а  $A$  и  $B$  — вершины шестиугольника, занятые полицейскими катерами (рис. 84). Полицейский  $A$ , следуя приказу, все время держит курс строго на лодку  $O$ , поэтому его катер описывает некоторую дугу  $AA'$ . Путь полицейского был бы короче, если бы его катер двигался по отрезку прямой  $AS$ , где  $S$  — центр равнобедренного треугольника  $AOB$ . Докажем, что и в этом случае контрабандист может уйти из западни. Известно, что  $V_A = \frac{4}{5}V_0$ , где  $V_A$  —

\* См. второе примечание на стр. 181.

скорость полицейского катера, а  $V_0$  — скорость моторной лодки контрабандиста. Если контрабандист находится в точке  $S$ , то полицейский находится на отрезке  $AS$  в точке  $A_1$  на расстоянии  $\frac{4}{5}AS$  от точки  $A$  (рис. 85). Допустим, что в точке  $A_1$  полицейский избрал оптимальную стратегию и направил свой катер так, чтобы перехватить лодку контрабандиста в упрежденной точке  $C$ . Ясно, что  $A_1C = \frac{4}{5}SC$ . Обозначив длину отрезка  $A_1C$  через  $x$  и применив к треугольнику  $A_1SC$  теорему косинусов, получим

$$\left(\frac{4}{5} SC\right)^2 = SC^2 + x^2 - 2SC \cdot x \cdot \frac{1}{2},$$

или

$$x^2 - SCx + \frac{9}{25} SC^2 = 0.$$

Поскольку дискриминант этого квадратного уравнения отрицателен,

$$\Delta = SC^2 - \frac{36}{25} SC < 0,$$

то полицейский не догонит контрабандиста.

Второе решение. Пусть  $t$  означает время. Предположим, что при  $t = 0$  лодка контрабандиста находится в начале координат, полицейский катер — в точке  $A$  с координатами  $(x_0, y_0)$  и контрабандист движется вдоль оси  $OY$  (рис. 86). В момент времени  $t$  контрабандист будет находиться в точке с координатами  $(0, 25t)$ , а полицейский катер — в некоторой точке  $C(x, y)$ . Пусть

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

— уравнения движения полицейского катера. Тогда  $\vec{V} = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ , где  $\dot{x} = dx/dt$ ,  $\dot{y} = dy/dt$  — вектор скорости катера. Ясно, что  $\vec{V} \parallel \vec{CB}$ . Но вектор  $\vec{CB}$  имеет составляющие  $(0 - x, 25t - y)$ . Следовательно,

$$\frac{\dot{x}}{-x} = \frac{\dot{y}}{25t - y},$$

или

$$\dot{x}(y - 25t) = \dot{y}x. \quad (1)$$

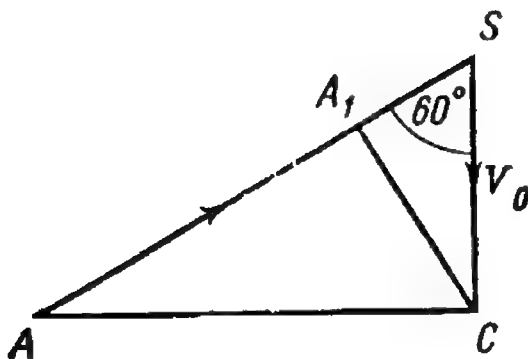


Рис. 85.

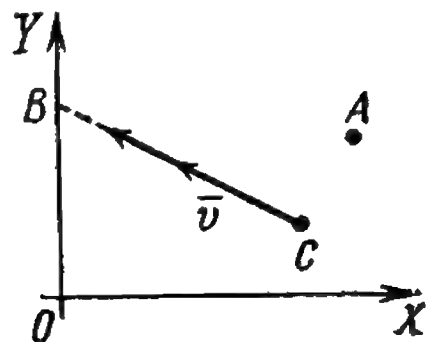


Рис. 86.

По условию задачи  $|\vec{V}| = 20$  (узлов), поэтому

$$\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = 20. \quad (2)$$

Рассмотрим уравнения (1) и (2). Введем новое обозначение:  $u = x/(y - 25t)$ . Тогда  $y - 25t = x/u$ , и уравнение (1) перейдет в уравнение

$$-\dot{x}x/u = \dot{y}x, \quad (3)$$

или

$$\dot{x}/u = \dot{y}. \quad (4)$$

Уравнение (2) в тех же обозначениях можно представить в виде

$$\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{x}^2/u^2} = 20,$$

или

$$\pm \dot{x} \sqrt{1 + 1/u^2} = 20, \quad (5)$$

причем знак следует выбрать так, чтобы выполнялось неравенство

$$\pm \dot{x} \sqrt{1 + \frac{1}{u^2}} > 0. \text{ Поскольку } y - 25t = x/u, \text{ то}$$

$$dy - 25 dt = \frac{u dx - x du}{u^2},$$

откуда

$$\dot{y} - 25 = \frac{u\dot{x} - x\dot{u}}{u^2},$$

или, наконец,

$$\dot{y} = \frac{u\dot{x} - x\dot{u}}{u^2} + 25.$$

Подставив вместо  $\dot{y}$  левую часть уравнения (4), получим

$$\dot{x}u = \frac{u\dot{x} - x\dot{u}}{u^2} + 25,$$

или

$$\frac{x\dot{u}}{u^2} = 25.$$

Итак,

$$\dot{u} = \frac{25u^2}{x}. \quad (6)$$

Разделив левую и правую части уравнения (5) соответственно на левую и правую части уравнения (6), найдем

$$\pm \frac{\dot{x}}{\dot{u}} \sqrt{1 + \frac{1}{u^2}} = \frac{20x}{25u^2}.$$

Но  $\dot{x}/\dot{u} = dx/du$ , следовательно,  $\pm dx/dt \sqrt{1 + 1/u^2} = 4x/5u^2$ , откуда  $dx/x = \pm du/5u \sqrt{u^2 + 1}$ , или  $\int dx/x = \pm 1/5 \int du/u \sqrt{u^2 + 1}$ . Слева стоит „табличный“ интеграл:  $\int dx/x = \ln C |x|$ , где  $C$  — произволь-

ная постоянная. Интеграл, стоящий в правой части, также легко вычисляется:

$$\int \frac{du}{u \sqrt{u^2 + 1}} = \ln \left| \frac{\sqrt{u^2 + 1} - 1}{u} \right|.$$

Таким образом,

$$Cx = \pm \frac{\sqrt{u^2 + 1} - 1}{u},$$

или  $Cxu = \pm (\sqrt{u^2 + 1} - 1)$ . Знак постоянной выберем так, чтобы  $Cxu = \sqrt{u^2 + 1} - 1$ . Подставляя в последнее уравнение  $u = x/(y - 25t)$ , получаем

$$\frac{Cx^2}{y - 25t} = \frac{\sqrt{x^2 + (y - 25t)^2}}{\pm (y - 25t)} - 1,$$

откуда

$$Cx^2 = \sqrt{x^2 + (y - 25t)^2} \mp (y - 25t),$$

или

$$Cx^2 \pm (y - 25t) = \sqrt{x^2 + (y - 25t)^2}.$$

Возводя в квадрат обе стороны этого выражения, находим

$$C^2x^4 \pm 2Cx^2(y - 25t) = x^2,$$

или (после сокращения на  $x^2$ )

$$C^2x^2 \pm 2Cx \frac{dy}{dx} = 1.$$

Ясно, что в том уравнении  $C \neq 0$ , ибо в противном случае мы пришли бы к противоречию  $0 = 1$ . Следовательно,

$$dy = \frac{1 - C^2x^2}{\pm Cx} dx,$$

$$y = \pm \int \frac{1 - C^2x^2}{Cx} dx = \pm \frac{1}{2C} \ln |x| \mp \frac{C}{4} x^2 + C_1.$$

Итак,  $y \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow 0$ . Отсюда мы заключаем, что полицейский катер никогда не достигнет оси  $OY$ , то есть никогда не догонит лодку контрабандиста.

Преобразуя уравнение, мы разделили обе его стороны на  $x^2$ . Эта операция была бы невозможна, если бы  $x$  был тождественно равен 0 при любом  $x$ , то есть если бы точка все время находилась на оси  $OY$ . Однако мы всегда можем выбрать оси координат так, чтобы на оси  $OY$  при  $t = 0$  не было ни одного полицейского катера.

Как следует из решения задачи, контрабандист всегда может вырваться из западни и уйти от погони, если будет следовать по прямой в любом направлении, лишь бы оно не было направлением на полицейский катер.

68. Космонавт производит посадку в точке  $P_0$  и отправляется в точку  $P_1$ , из которой идет в точку  $P_2 \neq P_0$ . Следовательно, точка  $P_2$  расположена от точки  $P_1$  дальше, чем  $P_0$ :

$$P_0P_1 < P_1P_2. \quad (1)$$

При продолжении маршрута каждый следующий этап был бы не короче предыдущего:

$$P_1P_2 \leq P_2P_3 \leq P_3P_4 \leq \dots \leq P_{n-1}P_n. \quad (2)$$

Если бы по окончании  $n$ -го этапа космонавт вернулся в  $P_0$ , то в силу неравенств (1) и (2) должно было бы выполняться неравенство

$$P_0P_1 < P_{n-1}P_0,$$

что противоречит выбору точки  $P_1$  как наиболее удаленной от точки  $P_0$ .

69. Задача о горном озере относится к теории так называемых звездных множеств.

Звездными называются множества, вообще говоря, не выпуклые, но обладающие тем не менее по крайней мере одной точкой, которую можно соединить с любой другой точкой множества отрезком прямой, все точки которого принадлежат рассматриваемому множеству. Задача о горном озере сводится к доказательству того, что множество точек, обладающих таким свойством, выпукло.

Обозначим через  $\Sigma$  множество всех точек на поверхности озера, из которого видна вся его гладь, а сами точки через  $A, B, C, \dots$ . Требуется доказать, что если  $A \in \Sigma$ ,  $B \in \Sigma$  и точка  $C$  лежит на отрезке  $AB$ , то  $C \in \Sigma$ .

Пусть  $P$  — произвольная точка на поверхности озера. Докажем, что точка  $P$  видна из точки  $C$ . Поскольку  $A \in \Sigma$  и  $B \in \Sigma$ , то отрезки  $AP$  и  $BP$  целиком проходят по озеру, нигде не выходя на сушу (рис. 87). Точка  $C$  расположена между точками  $A$  и  $B$ , следовательно, отрезок  $CP$  лежит внутри треугольника  $ABP$ . Предположим теперь, что точка  $P$  не видна из точки  $C$ . Тогда на отрезке  $CP$  должна была бы находиться некоторая точка  $Q$ , не принадлежащая поверхности озера. Но тогда точка  $Q$  «загораживала» бы точки, лежащие на продолжении отрезка  $BQ$  за  $Q$ , и точка  $R$  пересечения отрезка  $AP$  с продолжением отрезка  $BQ$  не была бы видна из точки  $B$ . Это противоречит тому, что  $B \in \Sigma$ . Следовательно, из точки  $C$  видна любая точка поверхности озера, что и требовалось доказать.

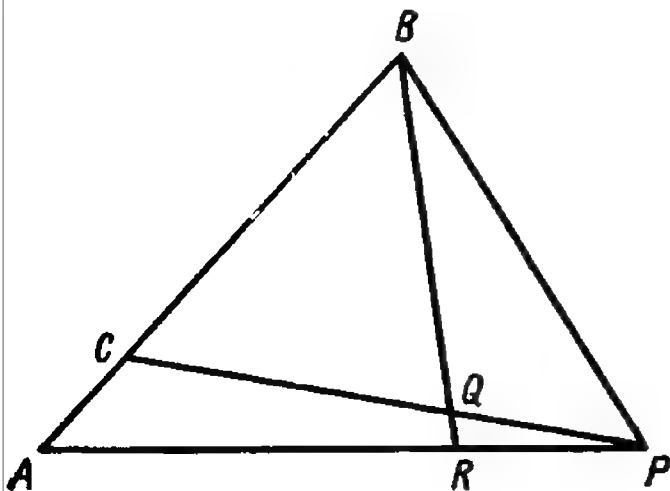


Рис. 87.

70. Карты, о которых говорится в условии задачи, имеют форму подобных прямоугольников  $ABCD$  и  $A'B'C'D'$ , причем точке  $A$  соответствует точка  $A'$ , точке  $B$  — точка  $B'$  и т. д.

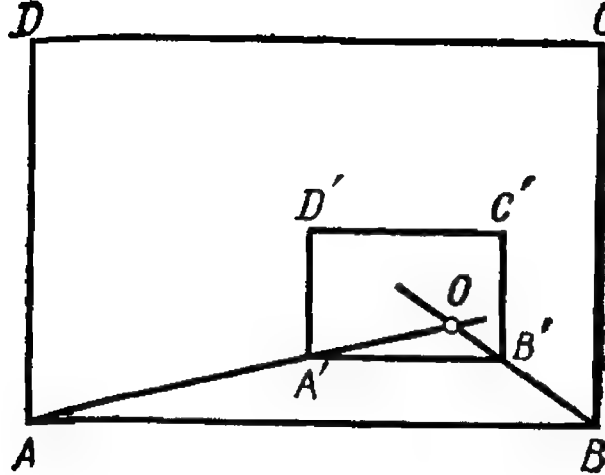


Рис. 88.

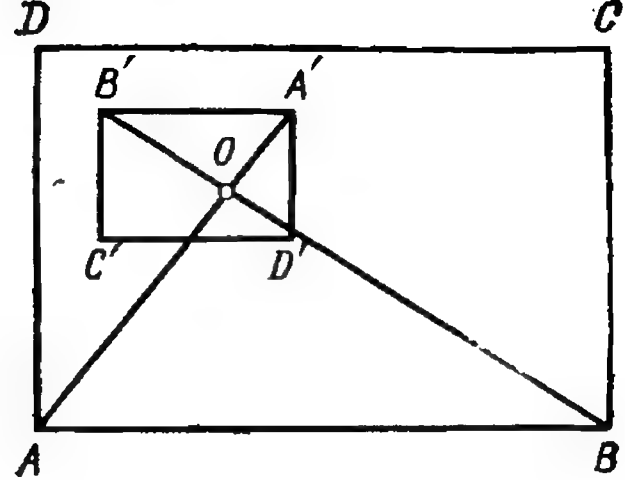


Рис. 89.

Если  $AB \parallel A'B'$ , то прямоугольники гомотетичны (на рис. 88 показан случай прямой, а на рис. 89 — обратной гомотетии). Две (и только две) точки школьной и прозрачной карт, соответствующие одной и той же точке на местности, в этом случае совпадают с центром гомотетии  $O$ . Точка  $O$  лежит на пересечении прямых  $AA'$  и  $BB'$ .

Если кальку повернуть вокруг центра гомотетии в некоторое наклонное (относительно нижнего обреза школьной карты) положение, то гомотетичность карт нарушится, но подобие прямоугольников сохранится.

Предположим, что калька косо наложена на школьную карту, и попытаемся найти для этого случая точку  $O$  — центр, относительно которого повернута калька, и одновременно центр гомотетии в исходном положении карт (когда  $AB \parallel A'B'$ ).

Прямые  $AB$  и  $A'B'$  (рис. 90) пересекаются в точке  $E$ , прямые  $CD$  и  $C'D'$  — в точке  $F$ . Прямые  $AD$  и  $A'D'$  пересекаются в точке  $G$ , прямые  $BC$  и  $B'C'$  — в точке  $H$ . Прямые  $EF$  и  $GH$  пересекаются в искомой точке  $O$ .

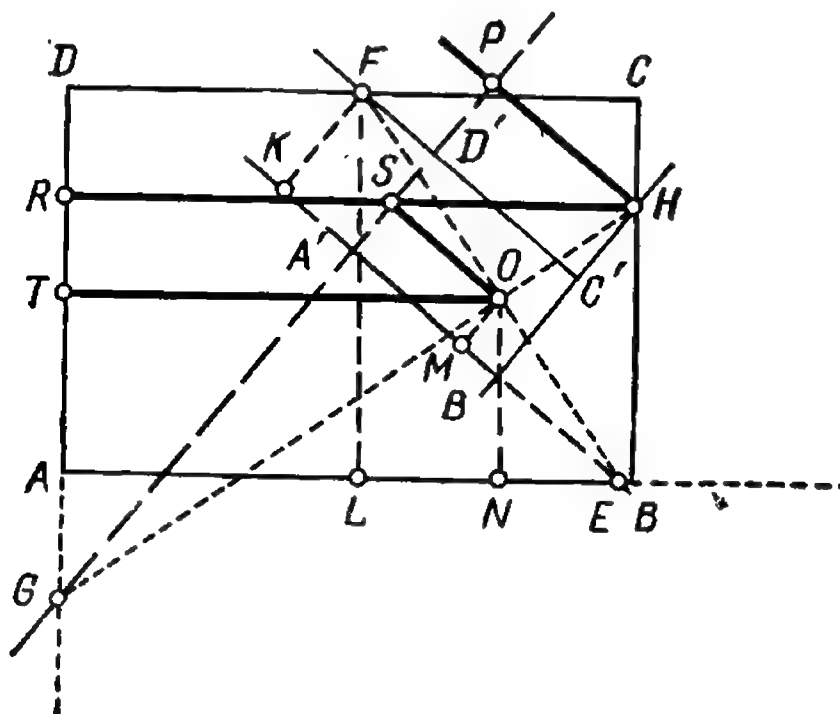


Рис. 90.

Докажем это утверждение. Пусть  $AB = a$ ,  $A'B' = a'$ ,  $BC = b$ ,  $B'C' = b'$ . Ясно, что

$$\frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = s,$$

где  $s$  — коэффициент подобия.

Далее  $OM \perp A'B'$  и  $FK \perp A'B'$ , причем точки  $M$  и  $K$  лежат на  $A'B'$ . Кроме того,  $ON \perp AB$  и  $FL \perp AB$ , причем точки  $N$  и  $L$  лежат на  $AB$ .

Поскольку треугольники  $NOM$  и  $LFK$  гомотетичны (точка  $F$  — центр гомотетии), то

$$\frac{OM}{ON} = \frac{FK}{FL} = \frac{b'}{b} = s.$$

Нетрудно видеть, что  $OS = A'D'$  и  $HP \perp A'D'$ , причем точки  $S$  и  $P$  лежат на  $A'D'$ . Аналогично  $OT \perp AD$  и  $HR \perp AD$ , причем точки  $T$  и  $R$  лежат на  $AD$ .

Треугольники  $TOS$  и  $RHP$  гомотетичны (точка  $G$  — центр гомотетии), следовательно,

$$\frac{OS}{OT} = \frac{HP}{HR} = \frac{a'}{a} = s,$$

а поскольку

$$\frac{OS}{OT} = \frac{OM}{ON},$$

то

$$\frac{OS}{OM} = \frac{OT}{ON}.$$

Из последнего равенства следует, что  $O$  — искомая точка.

71. На рис. 91 шнурок показан в исходном положении ( $ABCD$ ) и отклоненным от плоскости осевого сечения ( $ABC'D'$ ). Пусть  $x = \angle DOD' = \angle COC'$  (рис. 92), тогда  $D'C' = 2r \cos x$ . Дуга  $DD'$  равна  $rx$ , а отрезок  $AD' = BC' = r\sqrt{1+x^2}$ .

Длина шнурка в исходном положении  $ABCD$  равна  $6r$ , а в отклоненном  $ABC'D'$

$$2r + 2r\sqrt{1+x^2} + 2r \cos x = 2r(1 + \cos x + \sqrt{1+x^2}).$$

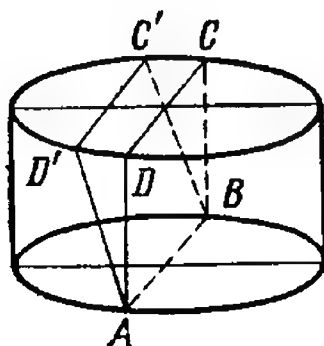


Рис. 91.

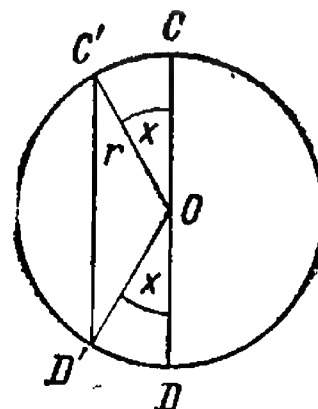


Рис. 92.



Исследуем, как ведет себя разность этих величин

$$y(x) = 6r - 2r(1 + \cos x + \sqrt{1 + x^2}) = 2r(2 - \cos x - \sqrt{1 + x^2}).$$

Если нам удастся показать, что  $y(x)$  всегда принимает значения, отличные от нуля, то это и будет означать, что шнурок можно снять с банки, не растягивая его и не разрывая.

Покажем, что при  $0 < x < \pi/2$  производная функции  $y(x)$  положительна, то есть что

$$y' = \sin x - \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} > 0$$

Пусть  $x = \operatorname{tg} \alpha$ . Тогда из известного тригонометрического выражения следует, что

$$\sin \alpha = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Но для всех  $\alpha$  справедливо неравенство

$$\alpha < \operatorname{tg} \alpha = x.$$

Следовательно, для  $0 < \alpha < x < \frac{\pi}{2}$

$$\sin \alpha < \sin x,$$

или

$$\frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} < \sin x,$$

откуда при  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  получаем, наконец, неравенство

$$\sin x - \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} > 0.$$

Таким образом, функция  $y(x)$  в интервале  $[0, \pi/2]$  монотонно возрастает и принимает наименьшее значение при  $x = 0$  и наибольшее — при  $x = \pi/2$ :

$$y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2r\left(2 - \sqrt{1 + \frac{\pi^2}{4}}\right) > 0.$$

Это означает, что разность между длиной шнурка в исходном положении  $ABCD$  и в отклоненном положении  $ABC'D'$  всегда положительна, вследствие чего шнурок можно снять с банки, не растягивая его и не разрывая.

Если исключить трение, то равновесие шнурка в исходном положении неустойчиво.

72. Переменные  $X$  и  $Y$  могут принимать четыре значения:  $O$ ,  $A$ ,  $B$  и  $AB$ . Следовательно, всего можно написать 16 отношений  $X \rightarrow Y$ , одни из которых истинны в силу правил I—III, а другие ложны в силу правила IV. Подставляя вместо  $X$  в правила I—III четыре возможных значения, получаем следующие истинные отношения:  $O \rightarrow O$ ,  $O \rightarrow A$ ,  $O \rightarrow B$ ,  $O \rightarrow AB$ ,  $A \rightarrow A$ ,  $A \rightarrow AB$ ,  $B \rightarrow B$ ,  $B \rightarrow AB$ ,

$AB \rightarrow AB$ . Остальные отношения ( $A \rightarrow O$ ,  $A \rightarrow B$ ,  $B \rightarrow O$ ,  $B \rightarrow A$ ,  $AB \rightarrow O$ ,  $AB \rightarrow A$ ,  $AB \rightarrow B$ ) в силу правила IV ложны. Отсюда непосредственно видно, что правила I — IV непротиворечивы, поскольку из них не следуют никакие два взаимно исключающие отношения. Точно так же можно убедиться в том, что из правил I — IV следует отношение  $A \rightarrow B$  (поскольку отношение  $A \rightarrow B$  ложно).

Остается еще доказать транзитивность отношения  $\rightarrow$ , то есть что из  $X \rightarrow Y$ ,  $Y \rightarrow Z$  следует  $X \rightarrow Z$ . Поскольку переменные  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  принимают лишь по четыре значения, то транзитивность отношения  $\rightarrow$  можно доказать, рассмотрев все комбинации групп крови  $O$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $AB$ .

Если  $X = O$ , то как  $Y$ , так и  $Z$  могут принимать произвольные значения, лишь бы выполнялось отношение  $Y \rightarrow Z$ . В силу правила III отношение  $O \rightarrow Z$  истинно для любого  $Z$ . Следовательно, при  $X = O$  отношение  $\rightarrow$  транзитивно.

Докажем теперь транзитивность этого отношения при  $X \neq O$ .

Если  $X = A$ , то возможны три случая: а)  $Y = A$  и  $Z = A$ ; б)  $Y = A$  и  $Z = AB$ ; в)  $Y = AB$  и  $Z = AB$ . Отсюда мы получаем три утверждения:

- а) если  $A \rightarrow A$ ,  $A \rightarrow A$ , то  $A \rightarrow A$ ;
- б) если  $A \rightarrow A$ ,  $A \rightarrow AB$ , то  $A \rightarrow AB$ ;
- в) если  $A \rightarrow AB$ ,  $AB \rightarrow AB$ , то  $A \rightarrow AB$ .

Из правил I — II следует, что все три утверждения истинны. Аналогично доказывается транзитивность отношения  $\rightarrow$  при  $X = B$ . Для этого достаточно в перечисленных выше утверждениях заменить отдельно стоящий символ  $A$  символом  $B$  (символ  $AB$  остается без изменений).

Рассмотрим, наконец, случай  $X = AB$ ,  $Y = AB$  и  $Z = AB$ . Соответствующее утверждение имеет вид

если  $AB \rightarrow AB$  и  $AB \rightarrow AB$ , то  $AB \rightarrow AB$ ,

и, очевидно, истинно

Таким образом, задача полностью решена.

73. Вывод, к которому пришли студенты-медики, объясняется просто: их третий товарищ имел группу крови  $A$  или  $B$ .

Докажем, что если бы третий студент имел группу крови  $A$ , то, пользуясь его кровью, можно было бы определить группу крови любого пациента  $X$ . Действительно, при исследовании крови третьего студента и пациента  $X$  возможны четыре случая:

- 1)  $A \rightarrow X$ ,  $X \rightarrow A$ ;
- 2)  $A \rightarrow X$ ,  $\overline{(X \rightarrow A)}$ ;
- 3)  $\overline{(A \rightarrow X)}$ ,  $X \rightarrow A$ ;
- 4)  $\overline{(A \rightarrow X)}$ ,  $\overline{(X \rightarrow A)}$

(черта сверху означает отрицание).

В первом случае из  $A \rightarrow X$  следует, что  $X \neq B$ ,  $X \neq O$ , а из  $X \rightarrow A$  — что  $X \neq AB$ , откуда  $X = A$ .

Во втором случае из  $A \rightarrow X$  следует, что  $X \neq B$ ,  $X \neq O$ , а из  $\overline{X \rightarrow A}$  — что  $X \neq O$ ,  $X \neq A$ , откуда  $X = AB$ .

В третьем случае из  $\overline{A \rightarrow X}$  следует, что  $X \neq A$ ,  $X \neq AB$ , а из  $X \rightarrow A$  — что  $X \neq B$ , откуда  $X = O$ .

Наконец, в четвертом случае из  $\overline{A \rightarrow X}$  следует, что  $X \neq A$ ,  $X \neq AB$ , а из  $X \rightarrow A$  — что  $X \neq O$ ,  $X \neq A$ , откуда  $X = B$ .

Итак, во всех случаях группу, к которой принадлежит кровь пациента, можно установить, пользуясь лишь кровью группы А. Аналогично доказывается возможность определения любой группы крови с помощью крови группы В.

Докажем теперь, что всем условиям задачи удовлетворяет лишь тот случай, когда кровь третьего студента-медика принадлежит к группе А или В. Действительно, пусть  $X, Y, Z$  — группы крови трех студентов. Исследуя кровь  $X$  и  $Y$ , студенты могли прийти к одному из следующих четырех заключений:

- |   |  |
|---|--|
| 1) $X \rightarrow Y$ и $Y \rightarrow X$ ;              | 3) $\overline{(X \rightarrow Y)}$ и $Y \rightarrow X$ ;              |
| 2) $X \rightarrow Y$ и $\overline{(Y \rightarrow X)}$ ; | 4) $\overline{(X \rightarrow Y)}$ и $\overline{(Y \rightarrow X)}$ . |

В первом случае оба отношения истинны лишь при  $X = Y$ . Следовательно, в этом случае студенты не могли определить своих групп крови.

Во втором случае из  $\overline{(Y \rightarrow X)}$  следует, что  $Y \neq X$ ,  $X \neq AB$  и  $Y \neq O$ . Поскольку, кроме того, должно выполняться отношение  $X \rightarrow Y$ , то возможны лишь  $X = O$  и  $Y = AB$ .

Аналогично в третьем случае допустимы лишь  $Y = O$ ,  $X = AB$ .

Наконец, в четвертом случае из  $\overline{(X \rightarrow Y)}$  следует  $X \neq Y$ ,  $X \neq O$ ,  $Y \neq B$ , а из  $\overline{(Y \rightarrow X)}$ , кроме того, что  $X \neq AB$  и  $Y \neq O$ . В этом случае, так же как и в первом, два студента не могут определить свою группу крови, ибо одинаково возможны и  $X = A$ ,  $Y = B$ , и  $X = B$ ,  $Y = A$ .

Отсюда ясно, что два первых студента-медика могли определить свою группу крови лишь в том случае, когда у одного из них кровь принадлежит группе О, а у другого — группе АВ. (Расширение исследований и включение в них третьего студента не изменили бы выводов, ибо по условию задачи установить группу крови своего третьего товарища студентам не удалось. Следовательно, исходом расширенных исследований могли быть только случаи 1 и 4, не позволяющие установить группу крови первых двух студентов.)

Итак, пусть  $X = O$ ,  $Y = AB$ . Третий студент не может иметь кровь группы О, ибо тогда, исследуя кровь  $Y$  и  $Z$ , студенты пришли бы к выводам, указанным в случаях 2 или 3, и группу крови  $Z$  можно было бы определить. Кровь третьего студента не может принадлежать и к группе АВ, ибо в противном случае, исследуя кровь  $X$  и  $Z$ , студенты пришли бы к одному из выводов, перечисленных в случаях 2 или 3.

Предположим, наконец, что кровь третьего студента-медика принадлежит к группе Z, которая есть либо А, либо В. Исследуя его кровь вместе с кровью первых двух студентов, обнаружим, что  $O \rightarrow Z$ ,  $Z \rightarrow O$ . Следовательно,  $Z \neq O$ ,  $Z \neq AB$  и  $AB \rightarrow Z$ , откуда  $Z \neq AB$ . Таким образом, либо  $Z = A$ , либо  $Z = B$ , причем установить, какая из этих двух возможностей соответствует действительности, нельзя никаким способом.

74. Ответ: сестра не может заменить мать и дать кровь для переливания братьям.

Докажем это утверждение.

Ни у одного из братьев не может быть крови ни группы О (ибо обладатель крови группы О мог бы дать кровь для переливания другому брату), ни группы АВ (ибо обладателю крови группы АВ можно было бы без вреда для его здоровья переливать кровь другого брата). Следовательно, братья имеют кровь группы А и В.

Поскольку мать может дать кровь для переливания любому из братьев, ее группой крови может быть только О. Кроме того, из закона наследственности групп крови следует, что отец должен иметь группу крови АВ, поскольку в противном случае у его сыновей не могло бы быть группы крови А и В. Согласно тому же закону наследственности, у сестры, имеющей тех же родителей, что и братья, кровь также должна принадлежать группе А или В. Действительно, следуя описанным выше правилам, находим: группа крови матери — ОО, группа крови отца — АВ, возможная группа крови детей — ОА или ОВ, то есть либо А, либо В.

Следовательно, сестра, имеющая группу крови А или В, может заменить мать и дать свою кровь для переливания лишь одному из братьев.

75. I. Уложим 65 квадратных плиток со стороной 10 см так, как показано на рис. 93. Тогда  $OA^2 = OA_1^2 + AA_1^2 = 2250 < 50^2$ ,  $OB^2 = OB_1^2 + BB_1^2 = 2250 < 50^2$ ,  $OC^2 = OC_1^2 + CC_1^2 = 2450 < 50^2$ ,  $OD^2 = OD_1^2 + DD_1^2 = 2450 < 50^2$ . Итак, при таком способе укладки плиток окружность радиусом 5 см «вмещает» не 64, а даже 65 плиток и, следовательно, не является окружностью наименьшего радиуса, содержащей 64 плитки.

II. Внутри круга радиусом 50 см можно уложить 67 квадратных плиток со стороной 10 см. Как это сделать, показано на рис. 94. Действительно,

$$OA^2 = OA_1^2 + AA_1^2 = 2425 < 50^2,$$

$$OB^2 = OB_1^2 + BB_1^2 = 2500 = 50^2,$$

$$OC^2 = OC_1^2 + CC_1^2 = 2500 = 50^2,$$

$$OD^2 = OD_1^2 + DD_1^2 = 2425 < 50^2.$$

76. Внутри круга радиусом 20 см можно разместить 8 квадратных плиток со стороной 10 см (рис. 95).

Точки В и Е лежат на диаметре KL, точка А — вершина квадрата II, точки Х и Y — концы хорды, перпендикулярной диаметру KL и проходящей через точку Е, которая лежит на основании квадрата VII.

Из треугольника AKL находим  $AB = \sqrt{BK \cdot BL}$ , или  $AB = \sqrt{BK \cdot (40 - BK)} = 10$ , откуда  $BK = 10 \cdot (2 - \sqrt{3})$ . Следовательно,  $EL = 10 - BK = 10(\sqrt{3} - 1)$  и  $EK = 30 + BK = 50 - 10\sqrt{3}$ . Из треугольника KLY получаем

$$EX = \sqrt{EK \cdot EL} = 10 \cdot \sqrt{(5 - \sqrt{3})(\sqrt{3} - 1)} = 10\sqrt{6\sqrt{3} - 8},$$

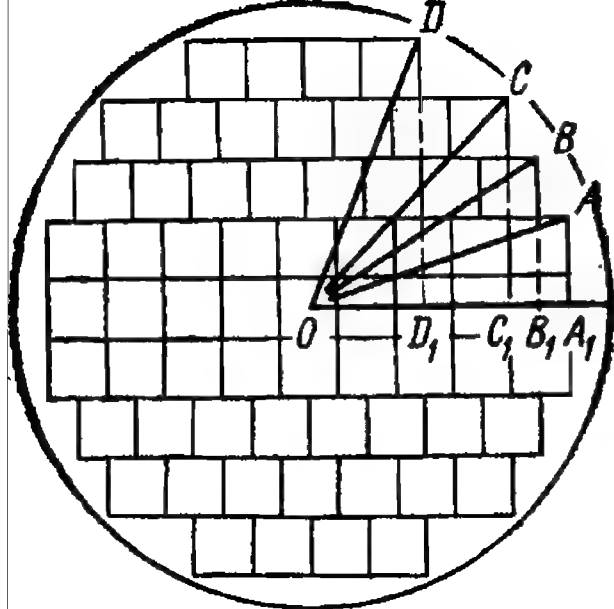


Рис. 93.

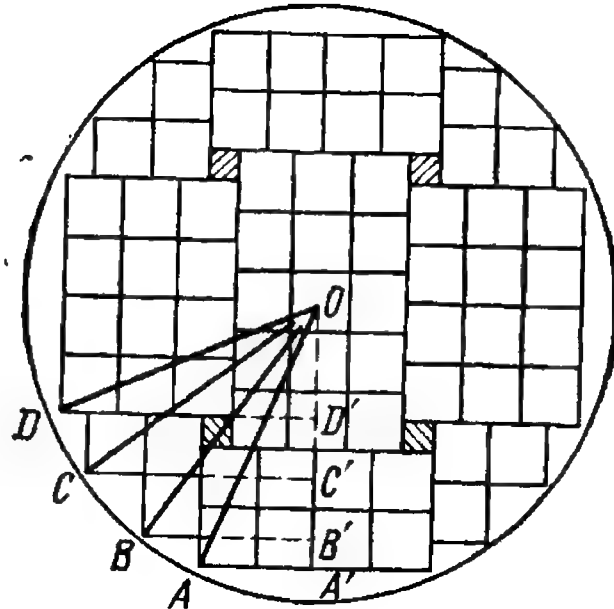


Рис. 94.

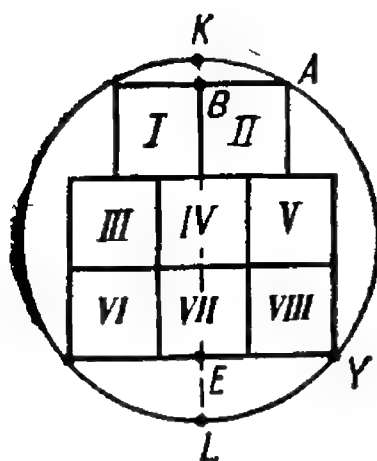


Рис. 95.

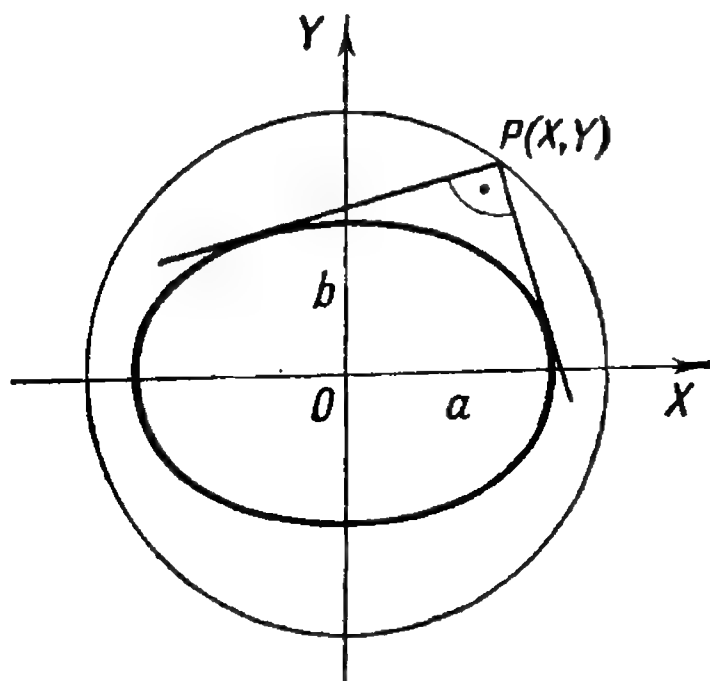


Рис. 96

откуда  $XU = 20 \cdot \sqrt{6\sqrt{3} - 8} \approx 30,9$ . Таким образом, основания попарно прилегающих квадратов VI, VII и VIII умецаются на хорде XY.

77. В плоскости поперечного сечения башни (и забора) введем прямоугольную систему координат (рис. 96), начало которой совпадает с центром окружности (сечения забора). Докажем, что возможное горизонтальное сечение башни имеет форму эллипса с полуосями  $a = 4$  м и  $b = 3$  м.

Напишем уравнение прямой, проходящей через точку  $P(X, Y)$  окружности, касательной к эллипсу  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ . Уравнение любой прямой, проходящей через точку  $P(X, Y)$ , имеет вид  $y - Y = m(x - X)$ , или, что то же,

$$y = mx + (Y - mX). \quad (1)$$

Как известно из аналитической геометрии, для того чтобы прямая, заданная уравнением  $y = mx + n$ , была касательной к эллипсу  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ , достаточно выполнения условия

$$b^2 + a^2 m^2 - n^2 = 0. \quad (2)$$

Из (1) и (2) получаем

$$b^2 + a^2 m^2 - (y - mX)^2 = 0. \quad (3)$$

Уравнение (3) позволяет найти два значения углового коэффициента  $m$  касательной к эллипсу, проходящей через точку  $P(X, Y)$ . По условию задачи требуется, чтобы угол между касательными к сечению башни был прямым (рис. 96), то есть чтобы  $m_1 m_2 = -1$ , где  $m_1$  и  $m_2$  — корни уравнения (3). Преобразуем это уравнение к виду

$$(a^2 - X^2) m^2 + 2XYm + (b^2 - Y^2) = 0.$$

По теореме Виета

$$m_1 m_2 = \frac{b^2 - Y^2}{a^2 - X^2},$$

Следовательно, для того чтобы угол между касательными к эллипсу был прямым, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\frac{b^2 - Y^2}{a^2 - X^2} = -1,$$

откуда

$$X^2 + Y^2 = a^2 + b^2.$$

Таким образом, из любой точки окружности радиусом  $\sqrt{a^2 + b^2}$  и с центром в начале координат эллипс  $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$  виден под прямым углом.

В нашем случае  $a = 4$ ,  $b = 3$ . Следовательно,  $r = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$ . Условия задачи выполнены полностью.

78. Приведем два решения задачи:

I. Поскольку доска в любой момент времени вращается вокруг некоторой точки, лежащей на контуре поперечного сечения бревна, линия, которую описывает конец доски, в каждой точке должна образовывать прямой угол с соответствующим этой точке положением доски. Следовательно, если бы конец доски описывал прямую, то доска могла бы лишь перемещаться параллельно самой себе и не могла бы перекашиваться по бревну.

Поэтому концы доски не могут описывать прямых.

II. Не ограничивая общности, можно предположить, что поперечное сечение бревна выпукло (если бы оно не было выпукло, то нам пришлось бы рассматривать его выпуклую оболочку). Траекторией конца доски служит эволюта поперечного сечения бревна (контур поперечного сечения есть геометрическое место центров кривизны траекторий, описываемых концами доски, или эвольвентой). Однако эволюта кривой не может быть прямой (ибо тогда точки эвольвенты были бы бесконечно удаленными).

Точное доказательство последнего утверждения читатель может найти в учебниках дифференциальной геометрии.

79. Если молчаливо предположить, что плотности бензина и керосина различны, то из условий задачи будет следовать, что 3,5 л

керосина весят 3 кг, а 5 л бензина — 4 кг, и, таким образом, плотность керосина составляет  $3 : 3,5 = 6 : 7$  кг/л, а плотность бензина —  $4 : 5$  кг/л. Зная плотности обоих видов горючего, нетрудно вычислить, что объем взятой взаймы смеси (так же как и возвращенной коллеге шофера) составляет 8,5 л, вес — 7 кг, а плотность —  $7 : 8,5$  кг/л.

Но доктор Шарадек утверждает, что шоферы не умеют отличать керосин от бензина. Отсюда следует, что плотности «бензина» и «керосина» могли быть одинаковыми. Обозначив неизвестную плотность через  $x$ , мы получим уравнение

$$3 + 5 \cdot x = 3,5x + 4.$$

Следовательно,  $x = 2/3$ . Таким образом, недовольный шоферами доктор Шарадек сумел получить из бензина и керосина, обладающих одинаковой плотностью, смесь с плотностью всего лишь 0,667 кг/л, которая значительно легче обеих предыдущих смесей.

Ту же задачу можно решать и по-другому. Обозначим через  $x$  плотность керосина, а через  $y$  плотность бензина. Пользуясь условиями задачи, составим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{3}{x} + 5 = 3,5 + \frac{4}{y}, \\ 3 + 5y = 3,5x. \end{cases}$$

Решая одно из уравнений относительно  $y$  и подставляя найденное выражение в другое уравнение, получаем квадратное уравнение для  $x$ :

$$21x^2 - 32x + 12 = 0.$$

Таким образом, задача имеет два решения:  $x_1 = 6/7$ ,  $y_1 = 4/5$  и  $x_2 = 2/3$ ,  $y_2 = 2/3$ . Первое решение относится к той смеси, которой пользовались шоферы, второе — к той, о которой говорил доктор Шарадек.

*Примечание.* Один из читателей обратил внимание на то, что утверждение доктора Шарадека о том, будто в современных автомобильных двигателях не используются столь тяжелые смеси, неверно: для дизельных двигателей применяется горючее плотностью от 0,85 до 0,88 кг/л.

80. Волшебная книга доктора Шарадека основана на следующем принципе.

Рассмотрим 10 000 пар чисел  $(n, nz - [nz])$ , где  $z = 1/2(\sqrt{5} - 1)$  — «золотое число» (связанное с «золотым сечением»),  $n$  — последовательные натуральные числа от 1 до 10 000, а символ  $[x]$  означает целую часть числа  $x$ , то есть наибольшее целое число, не превосходящее число  $x$ . Пары эти расположим так, чтобы их вторые члены  $nz - [nz]$  образовали возрастающую последовательность, а затем выпишем первые члены  $n$  каждой пары в том порядке, который определяется расположением вторых членов. Получившуюся в результате таблицу назовем таблицей *железных чисел*.

Построим, например, таблицу железных чисел для  $n = 10$ , то есть для натуральных чисел от 1 до 10.

Полагая  $\sqrt{5} \approx 2,236$ , находим, что  $z = 1/2(\sqrt{5} - 1) \approx 0,618$ .



Для 10 последовательных значений  $n$  получаем:

$n$	$nz - [nz]$	$n$	$nz - [nz]$
1	0,618	6	0,708
2	0,236	7	0,326
3	0,854	8	0,944
4	0,472	9	0,562
5	0,090	10	0,180

Наименьшее из чисел, стоящих в правом столбце, равно 0,090, следовательно, на первом месте в таблице железных чисел, составленной для первых десяти натуральных  $n$ , должно стоять число 5. Затем идут числа 10, 2, 7, 4, 9, 1, 6, 3, 8.

Таким образом, таблица железных чисел, составленная для отрезка ряда натуральных чисел, заключенных в интервале от 1 до 10, имеет вид:

5, 10, 2, 7, 4, 9, 1, 6, 3, 8.

Аналогично можно составить таблицу железных чисел для сколько угодно длинного отрезка ряда натуральных чисел.

Всякая таблица железных чисел независимо от того, из каких чисел она составлена, обладает следующим свойством: разность между соседними числами может принимать лишь три значения.

Действительно, выписывая разности между соседними числами нашей таблицы, мы получаем

5, —8, 5, —3, 5, —8, 5, —3, 5.

Таким образом, в рассматриваемом нами случае разность между соседними числами принимает лишь три значения: 5, —8 и —3.

Это свойство таблицы железных чисел сохраняется и после вычеркивания из нее всех чисел, больших любого заданного наугад числа, всех чисел, меньших любого заданного наугад числа, а также всех чисел, заключенных в интервале между двумя любыми числами. Например, вычеркнув в составленной нами таблице железных чисел все числа, которые меньше 3, мы получим «урезанную» таблицу

5, 10, 7, 4, 9, 6, 3, 8.

Между любыми входящими в нее соседними числами разность по-прежнему будет принимать лишь три значения:

5, —3, —3, 5, —3, —3, 5.

На этом свойстве таблицы железных чисел и построена любимая волшебная книга доктора Шарадека.

81. Прежде всего заметим, что набор из 4 гирь в 10, 30, 90 и 270 г позволяет взвесить с точностью до 10 г любой груз от 10 г до 400 г:

$$\begin{aligned}
 10 &= 10, \\
 20 &= 30 - 10, \\
 30 &= 30, \\
 40 &= 10 + 30, \\
 50 &= 90 - 30 - 10, \\
 60 &= 90 - 30,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
70 &= 90 + 10 - 30, \\
80 &= 90 - 10, \\
90 &= 90, \\
100 &= 90 + 10, \\
110 &= 90 + 30 - 10, \\
120 &= 90 + 30, \\
130 &= 90 + 30 + 10, \\
140 &= 270 - 90 - 30 - 10, \\
150 &= 270 - 90 - 30, \\
160 &= 270 + 10 - 90 - 30, \\
170 &= 270 - 90 - 10, \\
180 &= 270 - 90, \\
190 &= 270 + 10 - 90, \\
200 &= 270 + 30 - 90 - 10, \\
210 &= 270 + 30 - 90, \\
220 &= 270 + 30 + 10 - 90, \\
230 &= 270 - 30 - 10, \\
240 &= 270 - 30, \\
250 &= 270 + 10 - 30, \\
260 &= 270 - 10, \\
270 &= 270, \\
280 &= 270 + 10, \\
290 &= 270 + 30 - 10, \\
300 &= 270 + 30, \\
310 &= 270 + 30 + 10, \\
320 &= 270 + 90 - 30 - 10, \\
330 &= 270 + 90 - 30, \\
340 &= 270 + 90 + 10 - 30, \\
350 &= 270 + 90 - 10, \\
360 &= 270 + 90, \\
370 &= 270 + 90 + 10, \\
380 &= 270 + 90 + 30 - 10, \\
390 &= 270 + 90 + 30, \\
400 &= 270 + 90 + 30 + 10.
\end{aligned}$$

Второй набор из 5 гирь в 10, 20, 40, 80 и 160 г позволяет взвесить с точностью до 10 г любой груз от 10 до 310 г:

$$\begin{aligned}
10 &= 10, \\
20 &= 20, \\
30 &= 10 + 20, \\
40 &= 40, \\
50 &= 40 + 10, \\
60 &= 40 + 20 = 80 - 20 = 160 - 80 - 20^*), \\
70 &= 80 - 10, \\
80 &= 80, \\
90 &= 80 + 10, \\
100 &= 80 + 20, \\
110 &= 80 + 20 + 10, \\
120 &= 80 + 40, \\
130 &= 80 + 40 + 10,
\end{aligned}$$

---

\*) Мы не будем в дальнейшем приводить всех вариантов представления данного веса с помощью гирь.

$$\begin{aligned}
140 &= 160 - 20, \\
150 &= 160 + 10 - 20 \\
160 &= 160, \\
170 &= 160 + 10, \\
180 &= 160 + 20, \\
190 &= 160 + 20 + 10 \\
200 &= 160 + 40, \\
210 &= 160 + 40 + 10, \\
220 &= 160 + 40 + 20, \\
230 &= 160 + 40 + 20 + 10, \\
240 &= 160 + 80, \\
250 &= 160 + 80 + 10, \\
260 &= 160 + 80 + 20, \\
270 &= 160 + 80 + 20 + 10, \\
280 &= 160 + 80 + 40, \\
290 &= 160 + 80 + 40 + 10, \\
300 &= 160 + 80 + 40 + 20, \\
310 &= 160 + 80 + 40 + 20 + 10.
\end{aligned}$$

Владелец бакалейной лавочки кладет на одну чашу весов гири такого веса, какой нужен покупателю, а на другую чашу весов ставит, например, пакет с сахарным песком, после чего досыпает или отсыпает сахар, пока обе чаши не придут в равновесие. Чтобы отмерить нужное количество товара, владелец лавочки может пользоваться гирями как первого, так и второго набора, но набор из 4 гирь в 10, 30, 90 и 270 г для него более удобен, так как позволяет отмерять любое количество бакалейных товаров от 10 до 400 г. Пользуясь вторым набором гирь, он мог бы отвешивать пятью гирями лишь количества от 10 до 310 г. В первом же наборе четырех гирь достаточно для того, чтобы отпускать товары, вес которых колеблется в более широком диапазоне.

Для владельца магазина заведомо более удобен набор из 5 гирь в 10, 20, 40, 80 и 160 г и вот почему. Владелец магазина кладет на одну чашу весов, например, огурец, выбранный покупателем, а на другую чашу должен поставить гири, вес которых равен весу огурца. Предположим, что огурец весит 100 г. Владелец магазина поступит следующим образом. На вторую, пока еще пустую чашу весов он поставит самую тяжелую гирю, которая, очевидно, перевесит огурец. Затем на ту чашу, на которой лежит огурец, он поставит гирю в 80 г, после чего перевешивать будет уже чаша с огурцом. После этого он поставит 40 г на противоположную чашу (которая в результате опустится) и, наконец, гирю в 20 г — на чашу с огурцом, после чего чаши придут в равновесие. Этот метод позволяет ему взвешивать с точностью до 10 г любой предмет, вес которого колеблется между 10 и 310 г. Тот же метод, примененный к набору гирь в 10, 30, 90 и 270 г, не позволяет взвесить огурец весом 100 г с той же точностью. Владелец магазина установил бы лишь, что огурец весит меньше 140 г. Таким образом, для владельца магазина набор из четырех гирь в 10, 30, 90 и 270 г менее удобен, чем набор из пяти гирь в 10, 20, 40, 80 и 160 г.

82. Ответы на все вопросы задачи утвердительны.

Чтобы ответить на первый вопрос, представим себе, что каждому из членов компании из 12 человек мы сопоставили одну и только

одну вершину икосаэдра. Два человека из этой компании знакомы, если соответствующие им вершины соединены ребром икосаэдра. Мы утверждаем, что все условия задачи от а) до е) при этом выполнены. Проверим их по очереди.

Поскольку из каждой вершины икосаэдра исходят ребра, соединяющие ее с пятью другими вершинами, каждый из присутствовавших в компании знаком с 5 и не знаком с 6 остальными лицами. Следовательно, условие а) выполнено.

Вершины, принадлежащие одной грани, соответствуют тройке людей, знакомых между собой. Следовательно, условие б) также выполнено.

Если среди присутствующих нашлось бы четыре человека, знакомых между собой, то среди вершин икосаэдра можно было бы указать четыре вершины, попарно соединенные ребрами. Ясно, что любые три из четырех знакомых между собой людей также знакомы друг с другом и, следовательно, соответствующие три вершины принадлежат одной грани икосаэдра. Итак, мы должны были бы найти четвертую вершину, соединенную ребром с каждой из трех вершин, принадлежащих одной грани икосаэдра. Поскольку такой вершины у икосаэдра нет, то условие в) выполнено.

Займемся теперь поиском трех вершин, соответствующих трем не знакомым между собой лицам. Поскольку все вершины икосаэдра равноправны, достаточно найти одну такую тройку вершин. Предположим, что икосаэдр расположен в пространстве так, как показано на рис. 97. В качестве первой вершины выберем самую верхнюю точку икосаэдра. Ни одна из вершин, соединенных с выбранной вершиной ребрами, не может быть ни второй, ни третьей вершиной интересующей нас тройки. Из шести остальных вершин можно без труда выбрать две такие, которые бы не были соединены ребрами ни между собой, ни с первой из выбранных вершин. В то же время из тех же самых шести вершин нельзя выбрать три вершины так, чтобы они не были соединены ребрами ни между собой, ни с самой верхней точкой икосаэдра. Следовательно, среди присутствовавших нельзя найти четырех человек, из которых бы никто никого не знал, но всегда можно найти трех не знакомых между собой людей, например тех, кто соответствует вершинам  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  (рис. 97). Таким образом, условия г) и д) выполнены.

Наконец, условие е) выполнено потому, что лица, соответствующие противоположным вершинам икосаэдра, не имеют общих знакомых. Итак, рассмотренный нами пример удовлетворяет всем условиям задачи. Таким образом, ответ на первый вопрос получен.

Тот же пример мы получили бы, если бы сопоставили присутствовавшим не вершины, а грани икосаэдра. В этом случае двое

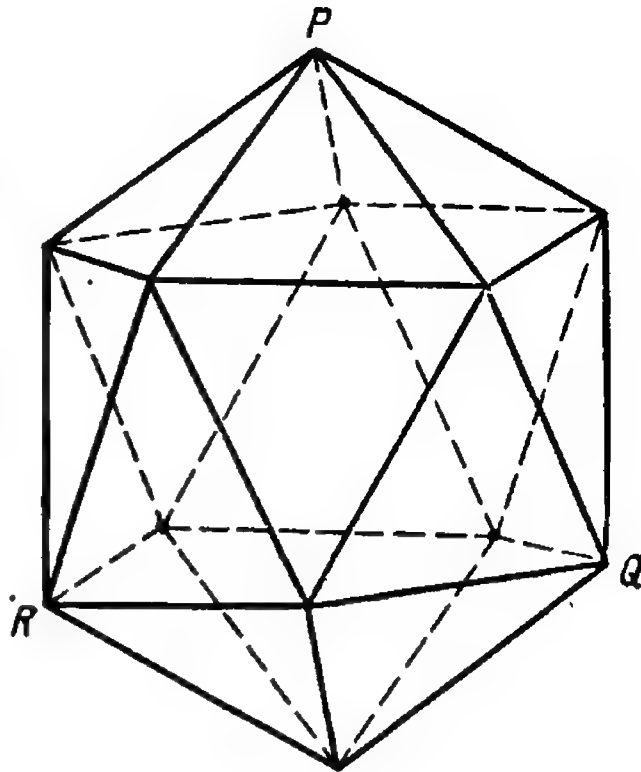


Рис. 97.

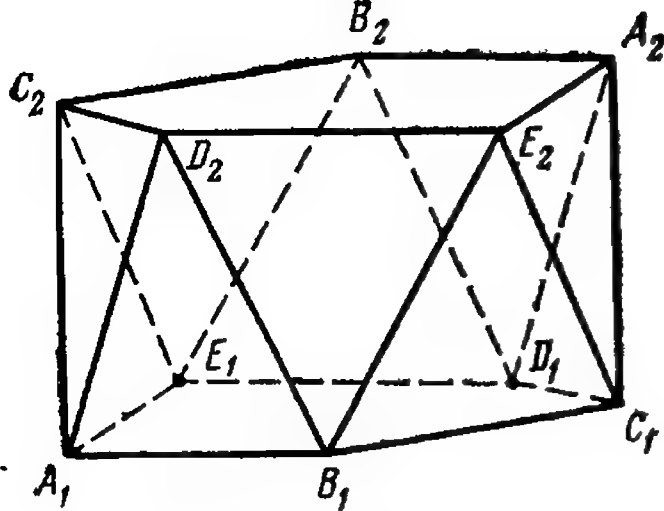


Рис. 98.

участников вечера знакомы между собой в том и только в том случае, если соответствующие грани имеют общее ребро. Из принципа двойственности\* следует, что построенный нами пример был бы тождествен предыдущему.

Чрезвычайно легко построить теперь пример компании из 12 человек, удовлетворяющей условиям, которые перечислил доктор Шарадек. Действительно, если в условиях б), в), г) и д) мы заменим «знакомых» на «незнакомых»,

то снова получим (с точностью до последовательности) те же условия б), в), г) и д). Следовательно, вершины икосаэдра могут служить примером и той компании, о которой говорил доктор Шарадек, если две вершины, лежащие на концах одного и того же ребра, сопоставить не знакомым между собой, а вершины, не лежащие на концах одного и того же ребра, — знакомым между собой членам компании. Ясно, что при этом каждый из собравшихся в компании знаком ровно с 6 другими членами общества. К последнему выводу мы придем, заменив в условии а) слова «не знаком» и «знал» словами «знаком» и «не знал».

Пример компании из 10 человек, удовлетворяющей условиям б), в), г) и д), в которой каждый знает 5 лиц и имеет знакомого, знающего всех остальных, можно построить следующим образом. Отбросим в икосаэдре две противоположные вершины вместе с выходящими из них ребрами. Условимся, что остальные ребра всегда соединяют вершины, соответствующие знакомым между собой членам компании. Кроме того, предположим, что противоположным вершинам  $A_1$  и  $A_2$ ,  $B_1$  и  $B_2$ , ...,  $E_1$  и  $E_2$  (рис. 98) также соответствуют знакомые между собой члены компании. Тогда каждый из 10 человек имеет знакомого, знающего остальных, неизвестных ему членов собравшегося общества: этот знакомый соответствует противоположной вершине, обозначенной той же буквой (хотя и с другим индексом), что и «собственная» вершина человека, о котором идет речь.

Рассуждения, аналогичные тем, которые были проведены выше, показывают, что условия б), в), г) и д) выполнены.

Пример компании из 10 человек, удовлетворяющей условиям от б) до е), можно получить из предыдущего примера так же, как мы получили пример компании, удовлетворяющей условиям доктора Шарадека, из первого примера. Другим примером может служить рис. 98, если считать знакомыми лишь тех лиц, которым соответствуют вершины, служащие концами одного и того же ребра, или, иначе, если считать, что люди, соответствующие вершинам  $A_1$  и  $A_2$ ,  $B_1$  и

\* См., например, книгу: Д. Гильберт и С. Кон-Фоссен, Наглядная геометрия, изд. 2-е, Гостехиздат, М—Л, 1951, стр. 100—101 — Прим перев.

$B_2, \dots, E_1$  и  $E_2$ , не знают друг друга. Доказательство этого утверждения мы предоставляем читателю.

83. Приведем два решения задачи: первое — «теоретическое», второе — «практическое».

1. В двоичной системе счисления любое целое положительное число  $N$  можно представить в виде

$$N = \sum_i \alpha_i 2^{i-1} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

где все коэффициенты  $\alpha_i$  равны либо нулю, либо единице. Отсюда видно, что, задавая  $n$  коэффициентов  $\alpha_i$ , мы можем получать  $2^n$  последовательных натуральных чисел. Положим  $n = 20$ . Тогда  $2^{20} = 1\,048\,576$ . Поскольку число слов, разъясняемых в «Толковом словаре русского языка», меньше  $1\,048\,576$ , их можно перенумеровать числами, которые при записи в двоичной системе имеют не более 20 знаков. Свои вопросы доктор Шарадек мог бы задавать, например, так:

— Равна ли единице  $i$ -я ( $i = 1, 2, \dots, 20$ ) цифра в двоичной записи номера задуманного Вами слова в «Толковом словаре русского языка»?

Получая в ответ либо «да», либо «нет», доктор Шарадек не более чем за 20 шагов установил бы номер  $i$ , следовательно, отгадал бы задуманное слово.

2. «Толковый словарь русского языка» состоит из 4 томов. С помощью двух вопросов устанавливаем, в котором томе находится задуманное слово. Предположим, что оно находится в самом обширном первом томе, содержащем 1568 страниц (А — Кюрины). Поскольку  $2^{10} < 1568 < 2^{11}$ , то с помощью следующих одиннадцати вопросов мы установим страницу, на которой находится задуманное слово. Один вопрос нам понадобится, чтобы узнать, в каком столбце — правом или левом — значится задуманное слово. У нас остается еще 6 вопросов, чтобы отыскать задуманное слово в столбце. Этого более чем достаточно, поскольку ни в одном из столбцов не разъясняется значение более  $2^6 = 64$  слов.

84. Пусть  $s$  — число учеников, увлекающихся хотя бы чем-то одним (музыкой, шахматами или велосипедным спортом),  $x$  — число учеников, которые любят только ходить на концерты,  $y$  — число учеников, увлекающихся исключительно шахматами и, наконец,  $z$  — число учеников, которые любят лишь велосипедный спорт.

В первый раз встали те, кто любит ходить на концерты, и те, кто любит играть в шахматы. Следовательно, всего встало  $s - z$  учеников, поскольку не встали лишь те, кто увлекается только велосипедным спортом. Среди вставших ценителей музыки, любящих играть в шахматы, было  $\frac{30}{100}(s - z)$ .

Проводя аналогичные рассуждения, получим, что во второй раз встали  $s - x$  учеников, из них обе руки подняли  $\frac{35}{100}(s - x)$  учеников, а в третий раз —  $(s - y)$  учеников, из них обе руки подняли  $\frac{40}{100}(s - y)$  учеников.

Предположим теперь, что среди учеников, увлекающихся чем-то одним — шахматами, музыкой или велосипедным спортом, — нет ни одного, разделяющего все три увлечения. Тогда, суммируя число

учеников, имеющих по одному и по два увлечения, мы должны получить  $s$ . Нетрудно видеть, однако, что

$$\frac{30}{100}(s - z) + \frac{35}{100}(s - x) + \frac{40}{100}(s - y) + \\ + x + y + z = 0,65x + 0,6y + 0,7z + 1,05s > s.$$

Отсюда следует, что сделанное нами предположение ложно.

Таким образом, доктор Шарадек имел полное основание утверждать, что среди учеников нашего рассеянного психолога заведомо имеются разносторонние личности, увлекающиеся одновременно и шахматами, и музыкой, и велосипедным спортом.

**85.** Так же как и в задаче 93 о трех бегунах, ситуация на первый взгляд может показаться парадоксальной: шахматист  $D$  в 64% разыгранных партий одерживает победу над шахматистом  $E$ , в свою очередь  $E$  выигрывает в 60% партий, проведенных с  $F$ , а  $F$  в 60% партий одерживает победу над  $D$ , причем средняя сила всех трех игроков одинакова!

Чтобы найти среднее число побед  $D$  над  $E$ , найдем прежде всего среднее число побед, одержанных  $E$  над  $D$ . Для этого достаточно знать вероятность разыгрывания партии, в которой  $E$ , играющий на 16 баллов, встречается с  $D$ , играющим на 12 баллов.

Поскольку шахматист  $E$  в трех случаях из пяти находится в спортивной форме, оцениваемой 16 баллами, а  $D$  в трех случаях из пяти играет в силу 12 баллов, то искомая вероятность равна  $\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$ . Следовательно,  $D$  одерживает победу над  $E$  в  $(1 - \frac{9}{25}) \cdot 100 = 64\%$  сыгранных партий.

Вероятность розыгрыша партии между  $E$ , играющим на 16 баллов, и  $F$  равна  $\frac{3}{5}$ . Следовательно, среднее число побед, одерживаемых  $E$  над  $F$ , составляет  $\frac{3}{5} \cdot 100 = 60\%$ .

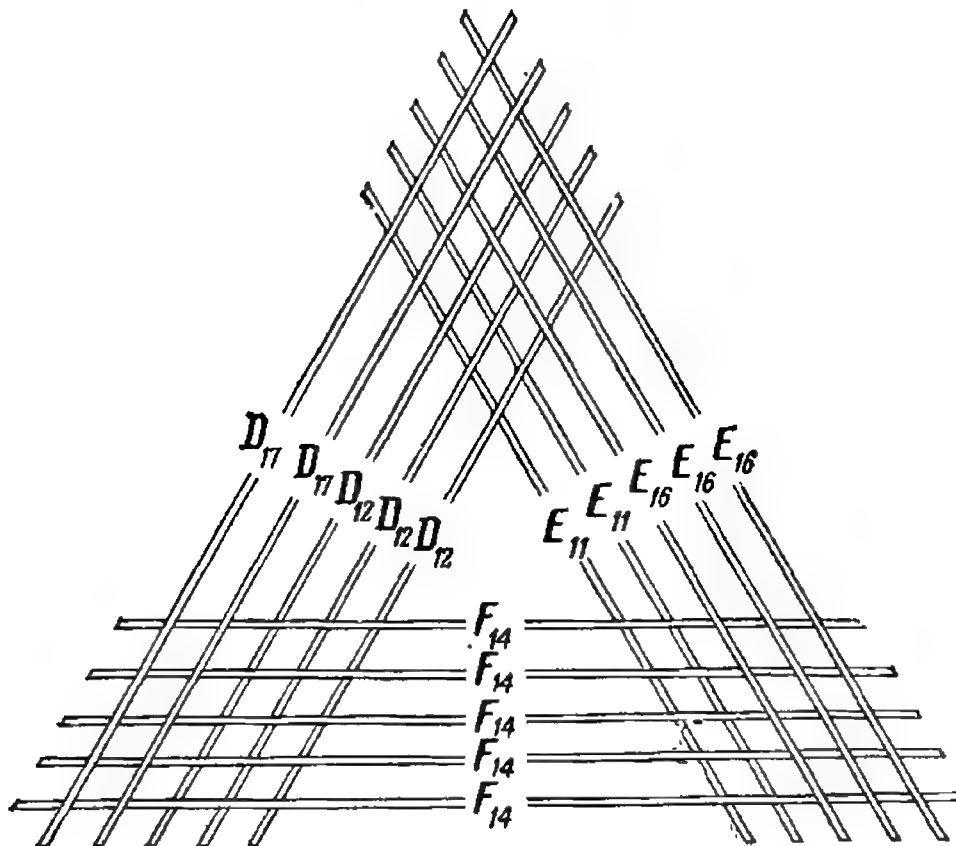


Рис. 99.



Наконец, поскольку вероятность розыгрыша партии между  $F$  и  $E$ , играющим на 12 баллов, также составляет  $\frac{3}{5}$ , то шахматист  $F$  одерживает победу над  $D$  в 60% разыгранных партий.

Вычислить среднюю силу каждого из завсегдатаев шахматного клуба совсем не трудно.

Средняя сила шахматиста  $D$  равна  $(2 \cdot 17 + 3 \cdot 12) : 5 = 14$  баллам, шахматиста  $E = (3 \cdot 6 + 2 \cdot 11) : 5 = 14$  баллам и шахматиста  $F$  также 14 баллам.

Среднее число побед, одерживаемых  $D$  над  $E$ ,  $E$  над  $F$  и  $F$  над  $D$ , нетрудно оценить по рис. 99.

86. Общий ход решения ясен из примечания и решения задачи 94 из книги «Сто задач», поэтому мы не будем приводить его. Заметим лишь, что обычным метром удобнее пользоваться в тех случаях, когда покупатель заранее указывает, сколько материала ему требуется, а метром доктора Шарадека в тех случаях, когда покупать приходится остатки.

87. Доктор Шарадек узнает температуру по шкале Фаренгейта, складывая показания своего термометра по шкалам Цельсия и Реомюра и прибавляя к полученной сумме число 32. Действительно, пусть  $R$ ,  $C$  и  $F$  — число градусов по шкалам Реомюра, Цельсия и Фаренгейта, соответствующих данной температуре  $t$ . Из устройства шкал следует, что между показаниями чисел градусов  $R$ ,  $C$  и  $F$  должны выполняться соотношения

$$R = 0,8C, \quad F = 1,8C + 32,$$

откуда

$$F = 1,8C + 32 = C + 0,8C + 32 = C + R + 32.$$

88. Предположим, что Земля имеет форму шара, длина большого круга которого составляет 40 000 км (этим приближением на практике обычно пользуются в тех случаях, когда особой точности не требуется). Докажем, что при этом предположении план, о котором говорится в условии задачи, невыполним.

Доказательство будем проводить от противного. Предположим, что план выполним и что нам удалось разместить на поверхности Земли 5 станций международного контроля так, чтобы расстояние между любыми двумя станциями было меньше 10 000 км. Обозначим станции  $A_1, A_2, \dots, A_5$ . Рассмотрим полушарие, полюс которого находится в точке  $A_1$ . (Это отнюдь не означает, что станция  $A_1$  должна располагаться на северном или южном географическом полюсе Земли: просто  $A_1$  есть точка, наиболее удаленная от основания рассматриваемого полушария.) Каждая точка полушария удалена от  $A_1$  не более чем на 10 000 км. Отсюда следует, что станции  $A_2, A_3, A_4$  и  $A_5$  расположены в другом полушарии, а именно: в полушарии с полюсом в точке  $B$  (рис. 100). Через ось  $A_1B$  и каждую из точек  $A_2, A_3, A_4, A_5$  проведем полуплоскость. Все проведенные полуплоскости однозначно определены, поскольку ни одна из точек  $A_2, A_3, A_4, A_5$  не может совпадать с полюсом  $B$  (если бы хоть одна из точек  $A_2, \dots, A_5$  совпадала с  $B$ , то остальные вообще не могли бы находиться в полушарии с полюсом  $B$ , не нарушая условий задачи). Не уменьшая общности, можно считать, что точки  $A_2$  и  $A_3$  принадлежат двум «соседним» плоскостям, проведенным через ось  $A_1B$  (в противном случае нам пришлось бы лишь соответствующим образом изменить нумерацию станций; лежать на одной и той же

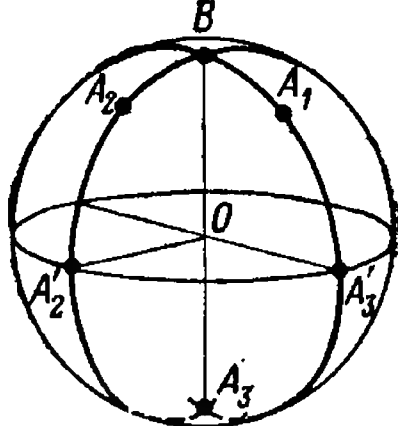


Рис. 100.

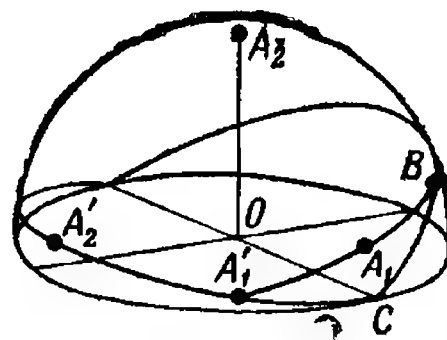


Рис. 101.

четверти большого круга, то есть определять одну и ту же плоскость, никакие из четырех точек  $A_2, \dots, A_5$  не могут) По крайней мере один из углов  $A'_iOA'_j$ , где  $A'_i, A'_j$  — соседние точки «экватора», должен быть не больше  $\pi/2$ . И снова, не уменьшая общности, можно предположить, что таким углом является  $A_2OA_3$ .

Рассмотрим теперь полушарие с полюсом в точке  $A_2$  (рис. 101). Точка  $B$  лежит в том же полушарии, поскольку  $\angle A_2OB < \pi/2$ . Точка  $A'_2$  также принадлежит рассматриваемому полушарию, поскольку  $\angle A_2OA'_2 < \pi/2$ . Кроме того,  $\angle A'_2OC = \pi/2$ . Следовательно, точка  $A'_3$  лежит на дуге большого круга  $A'_2C$ , поскольку  $\angle A'_2OA'_3 \leq \pi/2 = \angle A'_2OC$ . Отсюда следует, что точка  $A_3$  лежит на дуге  $BA'_3$ , то есть в том же полушарии. Таким образом, расстояние от  $A_2$  до  $A_3$  не превышает 10 000 км, что противоречит условию задачи.

Размещение станции, о котором говорилось в документе, невозможно, это и вызвало гнев нашего прославленного дипломата.

89. Если бы каждая чаша, покрывающая  $1/5$  поверхности Земли, охватывала не более 19 столиц государств — членов ООН, то на всей Земле было бы не более 95 государств — членов ООН. Это противоречит той части условия задачи, в которой говорится, что в ООН входит 101 государство. Следовательно, должна существовать чаша, которая покрывает  $1/5$  поверхности Земли и охватывает по крайней мере 20 столиц государств — членов ООН. Если бы она охватывала ровно 20 столиц, то задача доктора Шарадека была бы решена.

Предположим теперь, что каждая чаша, покрывающая  $1/5$  поверхности Земли, охватывает не менее 20 столиц государств — членов ООН. Рассуждая так же, как и в предыдущем случае, мы приходим к выводу, что не каждая такая чаша может охватывать более 20 столиц. Если бы какая-то чаша охватывала ровно 20 столиц государств — членов ООН, то мы снова получили бы решение задачи.

Итак, предположим, что существует чаша, покрывающая  $1/5$  поверхности Земли и охватывающая менее 20 столиц государств — членов ООН. Передвигая эту чашу по поверхности Земли из положения, в котором она охватывает более 20 столиц, в положение,

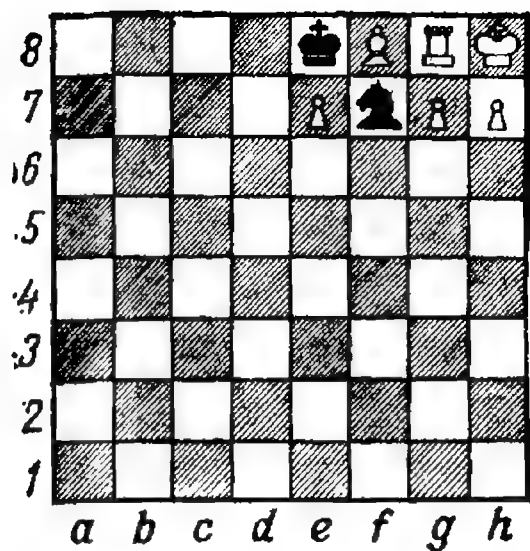


Рис. 102.

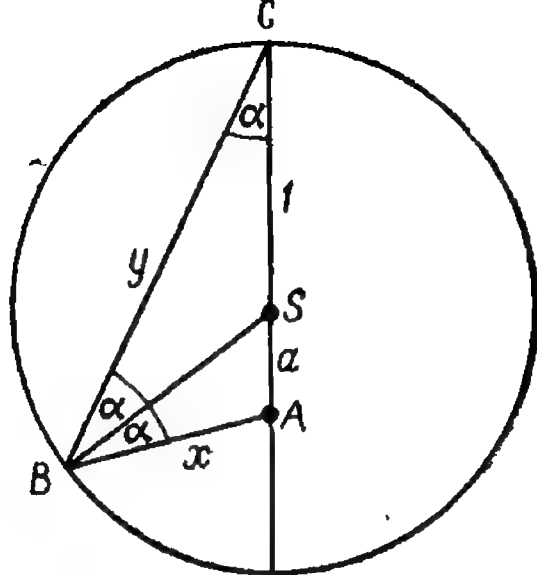


Рис. 103.

в котором она охватывает менее 20 столиц, мы «по дороге» непременно приведем ее в положение, в котором она будет охватывать ровно 20 столиц.

90. В шахматной партии объявление шаха, например, черными означает, что при очередном ходе черных король белых будет взят. В позиции, с которой встретился доктор Шарадек (рис. 102) после того, как Кедараш ходом Kg5 — f7 объявил ему шах, белые не могут пойти ни одной фигурой, и для того, чтобы поставить мат, черным пришлось бы сделать подряд два хода, а это запрещается правилами игры. В то же время указанную позицию нельзя считать патом, поскольку она возникла после шаха.

Интересно, что в действительности говорит по поводу такой ситуации шахматный кодекс?

91. Для того чтобы все три возможные траектории имели одинаковую длину, должно выполняться равенство  $x + y = 3 - a$ , где  $x$  означает расстояние от начального положения  $A$  бильярдного шара до точки, в которой он ударяется о борт,  $y$  — расстояние от точки  $B$  до отверстия  $C$ , а  $a$  — расстояние от  $A$  до центра бильярдного стола (рис. 103).

Поскольку  $BS$  — биссектриса угла  $B$  в треугольнике  $ABC$ , то  $x/a = y/1$ , или  $x/a = y$ . Из подобия треугольников  $SAB$  и  $BAC$  следует, что

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{1 + a}.$$

Подставляя  $a = x/y$  в первое и последнее уравнения, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} y(x + y) = 3y - x, \\ x + y = xy^2. \end{cases}$$

Разрешим второе уравнение относительно  $x$ ,

$$x = \frac{y}{y^2 - 1},$$

и подставим полученное выражение в первое уравнение:

$$y\left(\frac{y}{y^2-1} + y\right) = 3y - \frac{y}{y^2-1},$$

откуда

$$y^3 - 3y^2 + 4 = 0,$$

и, наконец,

$$(y-2)^2(y+1) = 0.$$

Поскольку  $y > 0$ , последнее уравнение имеет единственный (кратный) корень  $y = 2$ . Отсюда следует, что хорда  $BC$  совпадает с диаметром круга. Таким образом, не существует такого начального положения бильярдного шара, при котором все три траектории — прямолинейная и две ломаных — имели бы одинаковую длину.

92. Пусть радиус острова равен 1. Отобразим круг на описанный вокруг него квадрат (рис. 104). Достаточно рассмотреть  $1/10$  круга. Итак, отображим сектор круга  $OAB$  на треугольник  $OAC$  следующим образом.

Точке  $P$  сектора круга с координатами  $(\varphi, r)$  сопоставим точку  $P'$  треугольника с координатами  $(x, y)$  так, чтобы

$$x = r, \quad y = \frac{4}{\pi} \varphi r,$$

где

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, \quad 0 \leq r \leq 1.$$

Все точки дуги  $AB$  (рис. 105) сектора с полярными координатами  $(1, \varphi)$  перейдут в точки с прямоугольными координатами  $x = 1$ ,  $y = (4/\pi)\varphi$ , причем при  $\varphi = 0$  мы получим  $x = 1$ ,  $y = 0$ , а при  $\varphi = \pi/4$  получим  $x = 1$ ,  $y = 1$ . Следовательно, дуга  $AB$  переходит в отрезок  $AC$ . Таким образом, береговая линия острова при указанном отображении переходит в контур квадрата. Кроме того, при фиксированном  $\varphi_0$  все точки радиуса с полярными координатами  $(\varphi_0, r)$  при  $0 \leq r \leq 1$  переходят в точки с прямоугольными координатами  $x = r$ ,  $y = (4/\pi)\varphi_0 r$ , то есть лежат на прямой  $y = (4/\pi)\varphi_0 x$  при  $0 \leq x \leq 1$ . Элемент  $S_1$  сектора  $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$ ,  $r_1 \leq r \leq r_2$  отображается в трапецию  $S_2$ :  $(4/\pi)\varphi_1 x \leq y \leq (4/\pi)\varphi_2 x$  (рис. 106).

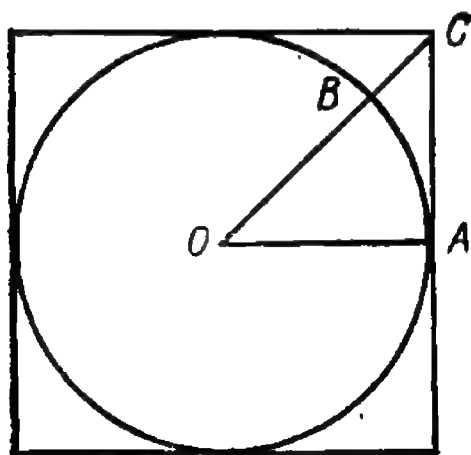


Рис. 104.

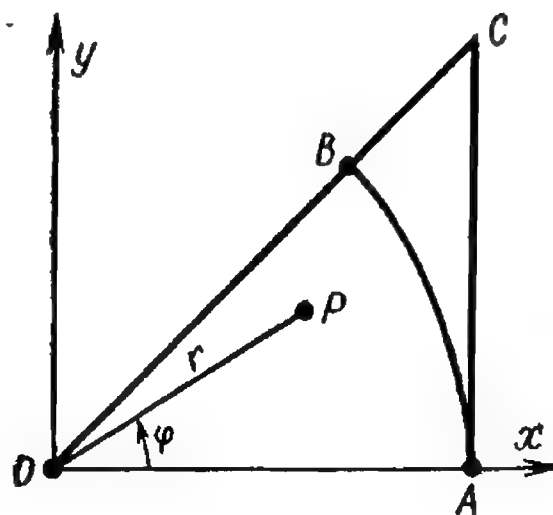


Рис. 105.

Обозначив площади элемента сектора и трапеции так же, как и сами фигуры, найдем

$$S_1 = \frac{1}{2} (\varphi_2 - \varphi_1) (r_2^2 - r_1^2),$$

$$S_2 = \frac{[(4/\pi) \varphi_2 r_2 - (4/\pi) \varphi_1 r_2] + [(4/\pi) \varphi_2 r_1 - (4/\pi) \varphi_1 r_1]}{2} (r_2 - r_1).$$

Выражение для  $S_2$  после несложных преобразований можно привести к виду

$$S_2 = \frac{2}{\pi} (\varphi_2 - \varphi_1) (r_2^2 - r_1^2).$$

Следовательно,

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\pi}{4}.$$

Таким образом, указанное отображение сохраняет масштабы.

93. Рассмотрим три забега, в которых бегуны  $A$ ,  $B$  и  $C$  пересекали линию финиша в следующей последовательности:  $ABC$ ,  $BCA$ ,  $CAB$ .

В двух забегах (первом и третьем)  $A$  опередил  $B$ , в двух забегах (первом и втором)  $B$  опередил  $C$  и в двух забегах (втором и третьем)  $C$  опередил  $A$ . Таким образом, достаточно, чтобы на протяжении всего спортивного сезона результаты соревнований оказывались такими же, как в трех рассмотренных нами забегах, и условия задачи будут выполнены.

94. На практике жеребьевку для 8 участников соревнований можно практически проводить следующим образом. Перенумеруем участников и расположим их в той же последовательности, в которой окажутся вытащенные наудачу их номера. В первом круге первый участник встретится со вторым, третий — с четвертым, пятый — с шестым и седьмой — с восьмым. Победители первых двух встреч образуют первую, а победители двух остальных — вторую пару второго круга. Наконец, в третьем круге встретятся победители второго круга. По условию задачи, каждый спортсмен обладает вполне определенной силой, поэтому исход любой встречи можно предсказать заранее. Второй по силе участник соревнований  $B$  может проиграть лишь при встрече с сильнейшим участником  $A$ . Следовательно, участник получает второй приз лишь в том случае,

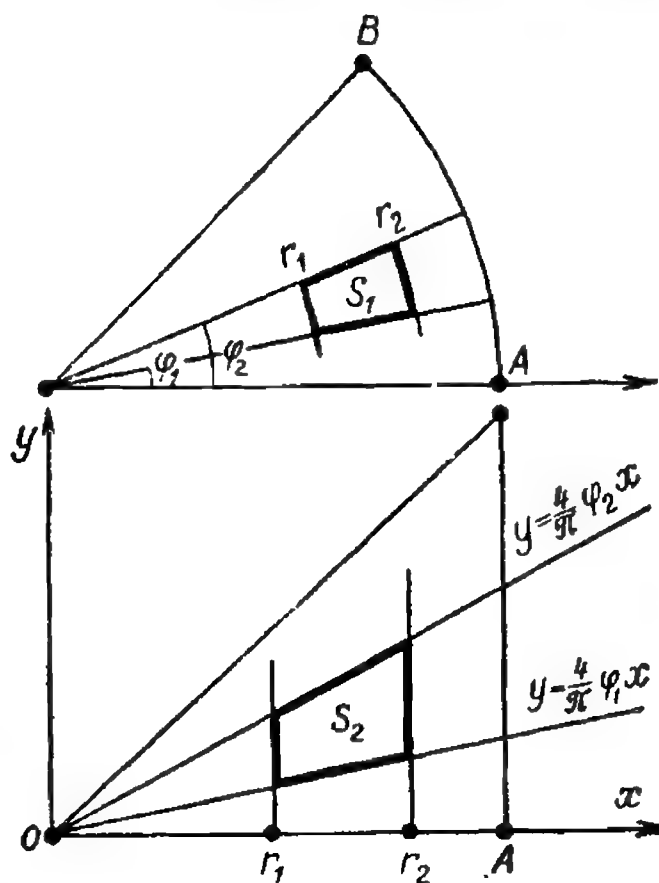


Рис. 106.

если он встречается с сильнейшим спортсменом  $A$  в третьем круге. Это возможно, если при жеребьевке  $A$  вытянет номер, который не больше 4, а  $B$  — номер, который не меньше 5 (или наоборот).

Производя жеребьевку для двух сильнейших из 8 участников соревнований, мы получаем 7·8 различных исходов. Участнику, тянущему жребий первым, может достаться любой из 8 номеров. Вытянуть же второй номер так, чтобы участники соревнований  $A$  и  $B$  встретились лишь в финале, возможно лишь в 4 случаях. Следовательно, среди  $7 \cdot 8 = 56$  возможных исходов жеребьевки двух сильнейших участников лишь в  $8 \cdot 4 = 32$  случаях второй приз по праву получает второй по силе спортсмен  $B$ , поэтому искомая вероятность равна  $\frac{32}{56} = \frac{4}{7}$ .

Задача без труда обобщается на случай  $2^n$  участников соревнований.

95. 1. Если при жеребьевке используется система, описанная в решении предыдущей задачи, то для того, чтобы второе место по праву досталось второму по силе спортсмену среди участников соревнований, один из двух сильнейших спортсменов должен вытянуть номер 5. Вероятность этого события равна сумме вероятностей того, что:

а) первый из двух сильнейших спортсменов при жеребьевке вытянул номер 5;

б) первый из двух сильнейших спортсменов вытянул один из номеров 1, 2, 3, 4, а второй вытянул номер 5.

Вероятность первого события равна  $\frac{1}{5}$ , вероятность второго —  $\frac{4}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{5}$ . Следовательно, искомая вероятность равна  $\frac{2}{5}$ .

2. Однако наиболее справедливым способом размещения «мертвых душ» следует считать иной, например, такой, при котором они окажутся после жеребьевки на четвертом, шестом и восьмом местах. Встречи первого круга в этом случае сводятся лишь к одной встрече двух «реальных» участников (первого и второго), во втором круге происходят две встречи и в третьем — одна. При этом каждый из финалистов до завершающей встречи успевает померяться силами по крайней мере с одним реальным участником. Если бы все «мертвые души» (как это было в п. 1) после жеребьевки оказались в конце списка, то мог бы представиться такой случай, когда слабейший из участников встречался с реальным противником лишь один раз, причем сразу в финале. Нетрудно вычислить, что для случая, когда «мертвые души» после жеребьевки оказываются на четвертом, шестом и восьмом местах, вероятность, с которой второе место по праву занято вторым по силе спортсменом среди участников соревнования, равна  $\frac{3}{5}$ . Пять «живых» («реальных») участников распределяются среди пяти мест (с номерами 1, 2, 3, 5 и 7) 5! различными способами. Благоприятными исходы жеребьевки можно считать в следующих случаях: а) сильнейший из участников вытягивает номер 1, 2 или 3, а второй по силе участник — номер 5 или 7; б) сильнейший участник вытягивает номер 5 или 7, а второй по силе участник — номер 1, 2 или 3. В том и в другом случае остальные участники при жеребьевке могут вытягивать любые из номеров, оставшихся после жеребьевки сильнейших. Следовательно, общее число благоприятных исходов жеребьевки равно  $3 \cdot 2 \cdot 3! + 2 \cdot 3 \cdot 3!$ , а искомая

вероятность составляет

$$\frac{2 \cdot 3 \cdot 3! + 2 \cdot 3 \cdot 3!}{5!} = \frac{3}{5}.$$

3. Если бы «мертвые души» принимали участие в жеребьевке наравне с реальными участниками соревнований, то искомая вероятность была бы такой же, как в предыдущей задаче, то есть  $\frac{4}{7}$ .

4. Рассмотрим еще один способ жеребьевки. Предположим, что сначала по жребию мы определяем пары, которые встречаются в первом круге (вытягивая жребий, устанавливаем очередность пяти участников соревнований и дописываем три «мертвые души»; в первом круге 1 встречается с 2, 3 с 4, 5 с «мертвой душой»), затем также по жребию определяем пары среди победителей первого круга. Вероятность того, что второй по силе спортсмен  $B$  перейдет во второй круг, такая же, как вероятность того, что в первом круге ему не выпало встречаться с сильнейшим спортсменом  $A$ . Так произойдет в следующих случаях:

- а)  $A$  вытягивает номер 1 или 2, а  $B$  — номер 3, 4 или 5;
- б)  $A$  вытягивает номер 3 или 4, а  $B$  — номер 1, 2 или 5;
- в)  $A$  вытягивает номер 5, а  $B$  — один из номеров от 1 до 4.

Полное число возможных размещений участников по номерам 1, 2, ..., 5 равно  $5!$ , а число благоприятных исходов жеребьевки, соответствующих случаям а), б) и в), —  $2 \cdot 3 \cdot 3!$ ,  $2 \cdot 3 \cdot 3!$  и  $1 \cdot 4 \cdot 3!$  (во всех трех случаях номера, не занятые двумя сильнейшими спортсменами, распределяются среди остальных участников соревнований совершенно произвольно). Следовательно, вероятность того, что спортсмен  $B$  окажется среди победителей встреч первого круга, равна

$$\frac{2 \cdot 3 \cdot 3! + 2 \cdot 3 \cdot 3! + 1 \cdot 4 \cdot 3!}{5!} = \frac{4}{5}.$$

Если спортсмен  $B$  в первом круге одерживает победу, то во втором круге будут участвовать оба сильнейших спортсмена  $A$  и  $B$ , один из более слабых участников и одна «мертвая душа». В зависимости от исхода жеребьевки  $B$  встретится либо с более слабым участником, либо с «мертвой душой», либо со спортсменом  $A$ . В двух случаях из трех  $B$  выйдет в финал и получит второй приз. Следовательно, вероятность того, что  $B$  выйдет победителем из встреч второго круга, если известно, что он вышел победителем из встреч первого круга, равна  $\frac{2}{3}$ . Но тогда вероятность того, что  $B$  займет второе место, равна  $\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$ . Итак, получен еще один ответ на вопрос задачи.

96. Первое решение. Пусть  $n$  — число гонщиков. Из условий задачи известно, что заездов было также  $n$  и в каждом из них приняли участие четыре гонщика. Отсюда следует, что полное число «гонщи́ко-заездов» равно  $4n$ . Поскольку гонщиков было  $n$  и каждый из них стартовал в стольких же заездах, как и остальные, то число заездов, в которых участвовал каждый гонщик, равно  $4n/n = 4$ . В любом из этих четырех заездов гонщик мерялся силами с тремя соперниками (каждый раз с другими). Следовательно, всего гонщиков было 13 и заездов также 13.



Итак, информация, полученная любителем гонок по гаревой дорожке от знакомых, полна, ибо позволяет установить, что участников гонок и заездов было 13. Однако полученных сведений недостаточно, чтобы определить состав отдельных заездов.

Действительно, перенумеруем гонщиков последовательными числами от 1 до 13. Тогда примером двух различных вариантов заездов, в которых принимает участие по 13 гонщиков, могут служить следующие (полное число возможных вариантов гораздо больше):

Заезд	Участники	Участники
I	1, 2, 3, 4	1, 2, 5, 8
II	1, 5, 6, 7	1, 3, 6, 9
III	1, 8, 9, 10	1, 4, 7, 10
IV	1, 11, 12, 13	1, 11, 12, 13
V	2, 5, 10, 12	2, 3, 10, 12
VI	2, 6, 8, 13	2, 6, 4, 13
VII	2, 7, 9, 11	2, 9, 7, 11
VIII	3, 5, 9, 13	5, 3, 7, 13
IX	3, 6, 10, 11	5, 6, 10, 11
X	3, 7, 8, 12	5, 9, 4, 12
XI	4, 5, 8, 11	8, 3, 4, 11
XII	4, 6, 9, 12	8, 6, 7, 12
XIII	4, 7, 10, 13	8, 9, 10, 13

Второе решение. Пусть  $n$  — число гонщиков, принимающих участие в заездах. Если бы каждый гонщик встречался с каждым соперником лишь в одном заезде и если бы в каждом заезде стартовало лишь два участника гонок, то число заездов было бы равно

$$\frac{n(n-1)}{2}.$$

Однако в каждом заезде стартовали 4 участника, то есть 6 различных пар, ибо

$$C_4^2 = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6.$$

Следовательно, заездов было в 6 раз меньше, чем в том случае, если бы участники гонок стартовали парами, то есть

$$\frac{n(n-1)}{12}.$$

Из условий задачи следует, что заездов было  $n$ , поэтому

$$\frac{n(n-1)}{12} = n.$$

Решая последнее уравнение, находим  $n_1 = 0$ ,  $n_2 = 13$ . Отбрасывая тривиальный случай  $n = 0$ , получаем, что  $n = 13$  — единственное решение, удовлетворяющее условиям задачи.

Задача допускает простое обобщение на случай, когда в каждом заезде стартуют  $k$  гонщиков. Рассуждения проводятся так же, как в приведенном выше решении. Если бы в каждом заезде стартовали лишь два гонщика и каждый гонщик встречался с любым из своих соперников лишь в одном заезде, то число заездов было бы равно

$$\frac{n(n-1)}{2}.$$

Однако в каждом заезде стартуют  $k$  гонщиков, или

$$C_k^2 = \frac{k(k-1)}{1 \cdot 2}$$

различных пар гонщиков, поэтому общее число заездов уменьшается в

$$\frac{k(k-1)}{1 \cdot 2}$$

раз и становится равным

$$\frac{n(n-1)}{k(k-1)}.$$

Из уравнения

$$\frac{n(n-1)}{k(k-1)} = n$$

следует, что  $n$  равно либо 0, либо  $k(k-1)+1$ .

Сведений о том, что гонщиков было столько же, сколько заездов, и что в каждом заезде стартовало  $k$  участников гонки, достаточно, чтобы установить, сколько гонщиков участвовало в заездах и скольким заездам был дан старт за время гонок.

97. Задача не столь тривиальна, как может показаться. В журнале «Математика» было опубликовано следующее решение:

«Если король при любом выборе начальной позиции не может пройти от левого края шахматной доски к правому, то каждое заминированное поле  $i$ -й горизонтали, не прилегающее к другому заминированному полю той же горизонтали, должно иметь общие стороны с заминированными полями  $(i-1)$ -й и  $(i+1)$ -й горизонталей. Следовательно, мы всегда можем указать последовательность заминированных полей, расположенных так же, как кости домино, и образующих «мост» между верхней и нижней горизонталью шахматной доски (см. рис. 107, на котором показаны лишь некоторые из заминированных полей; кроме них, на шахматной доске могут быть и другие заминированные поля). Поскольку такое расположение заминированных полей

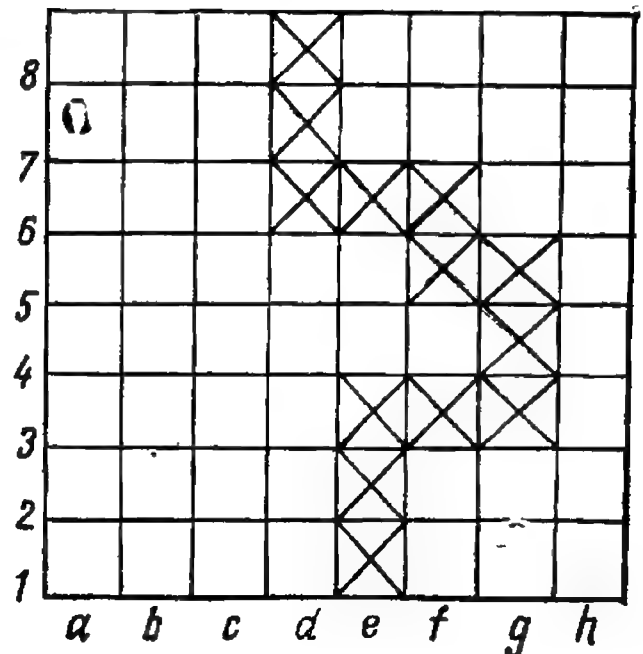


Рис 107.

необходимо и достаточно для того, чтобы по заминированным полям можно было пройти ходом ладьи от верхнего края доски до нижнего, то оба утверждения задачи — и прямое, и обратное — доказаны».

Автор задачи проф. Г. Штейнгауз отверг решение как ошибочное.

«Предложенное решение, — говорилось в письме Г. Штейнгауза в редакцию журнала «Математика», — представляет по существу не что иное, как тавтологию — повторение условия задачи и формулировку интуитивно ясных положений. Приведенного рассуждения достаточно, чтобы убедить нас в правильности утверждения задачи, но оно весьма далеко от строгого доказательства. В опубликованном решении, в частности, приводится следующая «лемма»: «Если король при любом выборе начальной позиции не может пройти от левого края доски к правому, то каждое заминированное поле  $i$ -й горизонтали, не прилегающее к другому заминированному полю той же горизонтали, должно иметь общие стороны с заминированными полями  $(i-1)$ -й и  $(i+1)$ -й горизонталей». Однако если на рис. 107 мы заминируем еще поле b5, то «лемма» окажется ошибочной. В действительности же речь идет о следующем. Можно доказать, что король не сможет пройти от левого края шахматной доски к ее правому краю, даже если мы разминируем изолированные поля. После того как это утверждение будет доказано, нам останется доказать, что группы полей, мешающих королю, образуют «мост» между верхним и нижним краями доски.

Опубликованное решение редакция оценила в 3 очка. Мне представляется, что эта оценка явно завышена, зато за полное решение задачи вполне можно назначить 20 очков».

Полностью признав правоту автора задачи, редакция журнала «Математика» назначила за полное решение задачи 20 очков, но... решения так и не последовало. Может быть, читатель этой книги предложит решение, достойное 20 очков?

**98.** Опишем метод, позволяющий расставить на шахматной доске ладьи в соответствии с правилами 1—4.

Введем для краткости следующую терминологию. Условимся называть вертикаль свободной, если на ней не стоит ни одна ладья и имеется по крайней мере одно белое поле, не атакуемое ни одной из расставленных на доске ладей. Назовем вертикаль занятой, если на ней находится ладья, стоящая на поле, которое не атакует по горизонтали ни одна из ладей, расставленных на шахматной доске. Назовем горизонталь свободной, если на ней нет ни одной ладьи.

На пустой шахматной доске число свободных вертикалей равно числу свободных горизонталей. Напишем над каждой вертикалью число находящихся в ней белых полей и приступим к расстановке ладей. Очередную ладью будем ставить всегда на свободную горизонталь и свободную вертикаль, над которой стоит число, меньшее или равное числу, стоявшему над каждой из остальных свободных вертикалей. Если бы, действуя так, мы сумели расставить ладьи на всех вертикалях, то условия 1—4 оказались бы выполнены. Пример такой расстановки ладей показан на рис. 108. Кружок на белом поле означает ладью, числа внутри кружков указывают последовательность расстановки ладей. Ясно, что для доски, изображенной на рис. 108, приведенное решение не единственно.

При описанном только что способе расстановки ладей на шахматной доске могут возникнуть некоторые трудности.

а) Поставив одну или несколько ладей, мы можем обнаружить, что все белые поля некоторой вертикали (или сразу нескольких вертикалей), на которой еще не стоит ни одна ладья, атакуются по горизонтали ранее расставленными ладьями. На какое бы белое поле такой вертикали мы ни поставили новую ладью, правило 3 будет нарушено.

Чтобы избежать нарушения, попытаемся передвинуть одну из уже расставленных ладей на другое белое поле, стоящее в той же вертикали, что и исходное.

Если этот маневр нам удастся, мы сможем беспрепятственно выставить на доску еще одну ладью. Примером позиции, в которой возникает описанная только что трудность, может служить позиция, изображенная на рис. 108. На левой доске после расстановки четырех ладей все белые поля, стоящие на вертикалях d и e, оказываются под ударом по горизонтали. Поэтому мы ищем вертикаль, на которой уже стоит ладья, но еще имеются белые поля, не атакуемые по горизонтали ни одной из ладей, расставленных на других вертикалях. Такова, например, вертикаль g. Передвинем ладью 2 на поле g5 (позиция изображена на рис. 109 в центре). После этого мы сможем поставить на вертикаль d пятую ладью, заняв ею поле d4. Затем нам придется передвинуть ладью 3 на поле b8, после чего мы сможем поставить шестую ладью на вертикаль e. Расстановка двух последних ладей не вызывает трудностей. Окончательная позиция показана на рис. 109 справа.

Итак, если нам встретятся трудности, устранимые одними лишь передвижениями ранее расставленных ладей по вертикали, то лады всегда можно расставить, не нарушив правила 1—4.

б) Однако может возникнуть трудность иного рода: на одной (или на нескольких) вертикали может не оказаться белых полей, не атакуемых по горизонтали, а на уже занятых вертикалях — свободных белых полей. Вертикали, все белые клетки которых по горизонтали находятся под ударом ладей, стоящих на других вертикалях, назовем запертыми, а соответствующую ситуацию — *первичной*

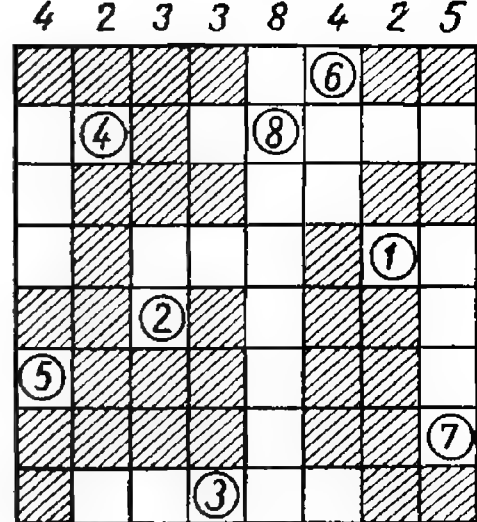


Рис. 108.

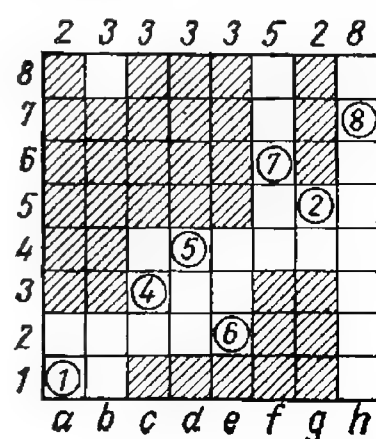
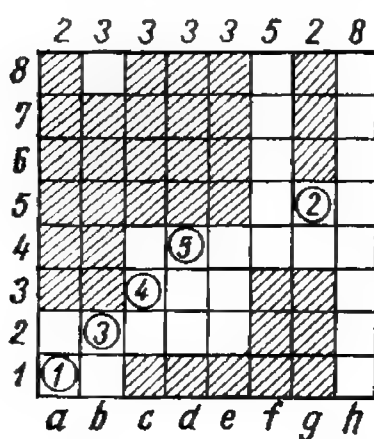
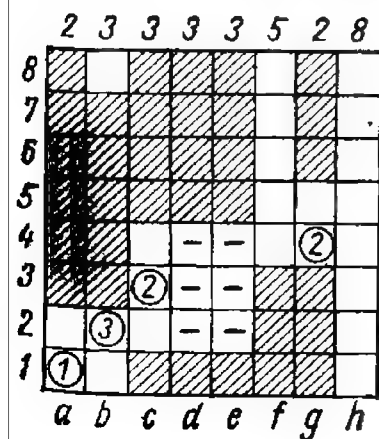


Рис. 109.

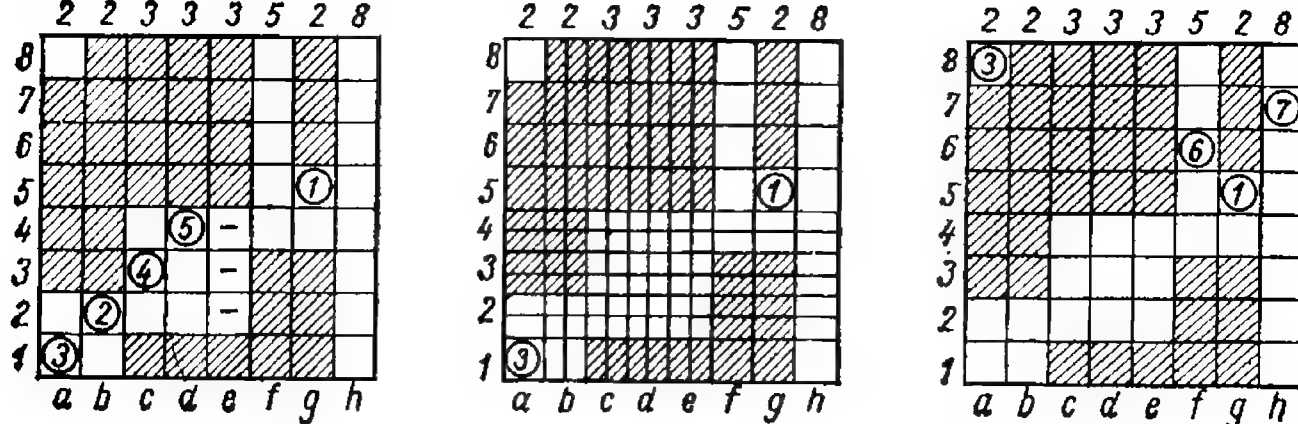


Рис 110.

**блокадой.** На запертую вертикаль мы не можем выставить ладью, не нарушив при этом правило 3. Точно так же мы не можем передвинуть уже стоящие на доске ладьи по вертикали, ибо в соответствующих вертикалях нет свободных белых полей.

В этом случае возникшую трудность можно ликвидировать, если воспользоваться одним приемом, который мы поясним на примере. Слева на рис. 110 изображена позиция, в которой вертикаль е заперта: все белые поля, стоящие на этой вертикали, находятся под ударами по горизонтали ладей 2, 4 и 5. В то же время на вертикалях, занятых ладьями 2, 4 и 5, нет ни одной свободной белой клетки. Снимем с шахматной доски ладьи, запирающие поля вертикали е, и в дальнейшем не будем вообще ставить ладьи на вертикали, которые были заперты, а также на вертикали и горизонтали, с которых ладьи были сняты (в рассматриваемом нами примере речь идет о вертикалях b, c, d, e и горизонталях 2, 3, 4; на рис. 110 в центре запрещенные вертикали и горизонтали вычеркнуты). Заметим, что число зачеркнутых горизонталей всегда меньше числа зачеркнутых вертикалей и что поля, стоящие на пересечении зачеркнутых вертикалей и свободных горизонталей, черные. В силу этого можно не опасаться, что при дальнейшей расстановке ладей появятся белые поля, находящиеся в зачеркнутых вертикалях и атакуемые по горизонтали новыми ладьями.

Может представиться и такой случай, когда на зачеркнутых вертикалях имеются белые поля, атакуемые по горизонтали не теми ладьями, которые мы сняли, освобождая запертые вертикали, а другими ранее стоявшими на доске ладьями. В соответствии с правилом 4 этим полям должна угрожать по вертикали какая-то ладья, однако на зачеркнутые вертикали мы не ставим новых ладей. Такая ситуация называется *вторичной блокадой*. В рассматриваемом нами примере (рис. 110) ладья 3 атакует по горизонтали поле b1. Существует два способа ликвидации вторичной блокады. Прежде всего необходимо выяснить, имеются ли белые поля, стоящие на пересечении вертикали, на которой стоит блокирующая ладья, и незачеркнутых, но свободных горизонталей. Если такие поля существуют, то следует попытаться переставить блокирующую ладью на одно из них, а затем уже продолжить расстановку ладей на доске. Если же свободных белых полей нет, то следует дополнительно к уже вычеркнутым горизонталям и вертикалям вычеркнуть горизонталь и вертикаль, на пересечении которых стоит блокирующая ладья. Иначе

говоря, мы снимаем с доски не только запирающие, но и (вторично) блокирующие ладьи. В рассматриваемом примере (рис. 110) вторичную блокаду можно ликвидировать, передвинув ладью 3 на поле а8. Если бы поле а8 было черным, то нам пришлось бы вычеркнуть вертикаль а и горизонталь 1. И в том, и в другом случае при расстановке остальных ладей никаких трудностей не возникает.

Ликвидировав вторичную блокаду и зачеркнув соответствующие горизонтали и вертикали, продолжим расстановку ладей. От первичных и вторичных блокад, которые могут возникнуть в дальнейшем, мы освобождаемся так же, как это было сделано в разобранных выше примерах.

Докажем теперь, что наш метод расстановки ладей на шахматной доске всегда позволяет прийти по крайней мере к одной позиции, удовлетворяющей условиям задачи.

Прежде всего заметим, что если мы всегда будем ставить ладью на свободную вертикаль, в которой число белых полей не меньше числа белых полей в любой из остальных свободных вертикалей, то последнюю ладью мы поставим на вертикаль, содержащую одни лишь белые поля. Ладью на такой вертикали всегда можно поставить независимо от того, встречались ли ранее блокады обоих типов или нет.

Если первичные и вторичные блокады при расстановке предыдущих ладей не возникали, то на шахматной доске к моменту постановки последней ладьи уже должна стоять  $n - 1$  ладья, причем каждая ладья стоит на своей горизонтали и своей вертикали. Следовательно, свободными остались лишь одна горизонталь и одна вертикаль. Поскольку свободная вертикаль заполнена только белыми полями, ничто не мешает нам поставить последнюю ладью на поле, находящееся на пересечении этой вертикали со свободной горизонталью. В результате на шахматной доске окажутся расставленными  $n$  ладей — по одной на вертикали и на горизонтали. Ясно, что такие ладьи не атакуют одна другую. Кроме того, все поля, не занятые ладьями, оказываются под ударом и по горизонтали, и по вертикали. Таким образом, расстановка ладей в этом случае удовлетворяет условиям задачи.

Предположим теперь, что, расставляя ладьи, мы столкнулись с первичной или вторичной блокадой. Вычеркнув соответствующие горизонтали и вертикали и составив из оставшихся «обломков» шахматной доски новую доску, мы получим прямоугольник, в котором больше горизонталей, чем вертикалей. Итак, поставив последнюю ладью на вертикаль, составленную из одних лишь белых полей, мы не сможем заблокировать какую-нибудь вертикаль, поскольку на каждой из вертикалей уже стоит ладья и каждое незачеркнутое и в то же время не занятое ладьей поле находится под ударом по вертикали.

Последняя (белая) вертикаль не может быть заблокирована, поскольку на шахматной доске расставлено самое большее  $n - 1$  ладья, которые, атакуя по горизонтали, угрожают  $n - 1$  полю белой вертикали. Следовательно, последнюю ладью мы всегда можем поставить на то поле белой вертикали, которому не угрожает по горизонтали ни одна ладья.

Важно отметить, что предложенное решение применимо ко всем прямоугольным шахматным доскам, у которых число вертикалей меньше числа горизонталей, и удовлетворяет условиям задачи.



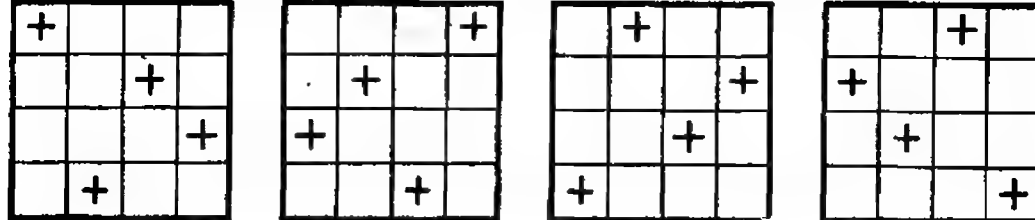


Рис. 111.

99. Если не считать различными позиции, переходящие одна в другую при поворотах доски и отражениях относительно вертикальной и горизонтальной осей симметрии, то расставить 4 фигуры на шестнадцатиклеточной доске так, как сказано в условии задачи, можно лишь одним-единственным способом. С учетом поворотов и отражений получаем 8 возможных расстановок четырех фигур, четыре из которых показаны на рис. 111.

Распределив четыре расстановки фигур, изображенные на рис. 111 так, как показано на рис. 112, мы получим расстановку 16 фигур в клетках-кубиках пространственной шахматной доски, при которой в любом слое на каждой горизонтали и каждой диагонали (но не на каждой из больших диагоналей) стоит ровно одна фигура.

Можно доказать, что задача о расстановке 16 фигур в клетках-кубиках трехмерной шахматной доски  $4 \times 4 \times 4$ , при которой в каждом слое на любой горизонтали, любой вертикали и на любой из больших диагоналей стояла бы ровно одна фигура, не имеет решения.

100. Прежде всего обратим внимание на то, что на трехмерной шахматной доске невозможно расставить 65 ладей так, чтобы ни одна ладья не атаковала другую. Действительно, если бы такая расстановка была возможна, то в одном из горизонтальных «слоев» трехмерной доски должно было бы находиться по крайней мере 9 ладей. Но горизонтальный «слой» можно рассматривать как обычную шахматную доску  $8 \times 8$ , на которой нельзя расставить 9 ладей

так, чтобы никакие две из них не атаковали одна другую: по крайней мере на одну вертикаль и одну горизонталь нам непременно пришлось бы поставить две ладьи, каждая из которых находилась бы под ударом другой.

Решение рассматриваемой нами задачи сводится к тому, чтобы в каждом из восьми горизонтальных слоев разместить по 8 ладей так, чтобы они не атаковали друг друга и чтобы при этом в каждом вертикальном столбике из трехмерных «клеток» находилась ровно одна ладья.

Назовем ладьи, стоящие в  $i$ -м горизонтальном «слое» ( $i = 1, 2, \dots, 8$ ), ладьями  $i$ -го рода. Поставленную задачу можно тогда сформулировать так: заполнить обычную шахматную доску ладьями восьми родов — по 8 ладей каждого рода — так, чтобы ни одна ладья не атаковала ладью того же самого рода.

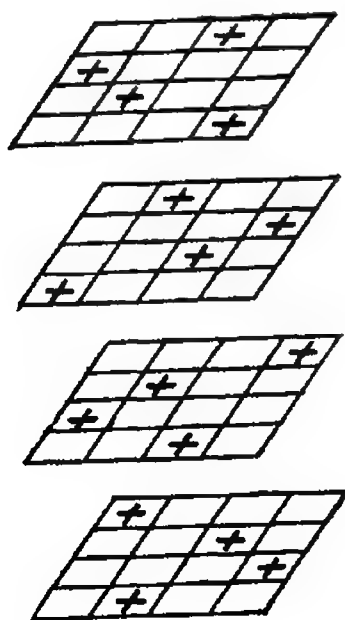


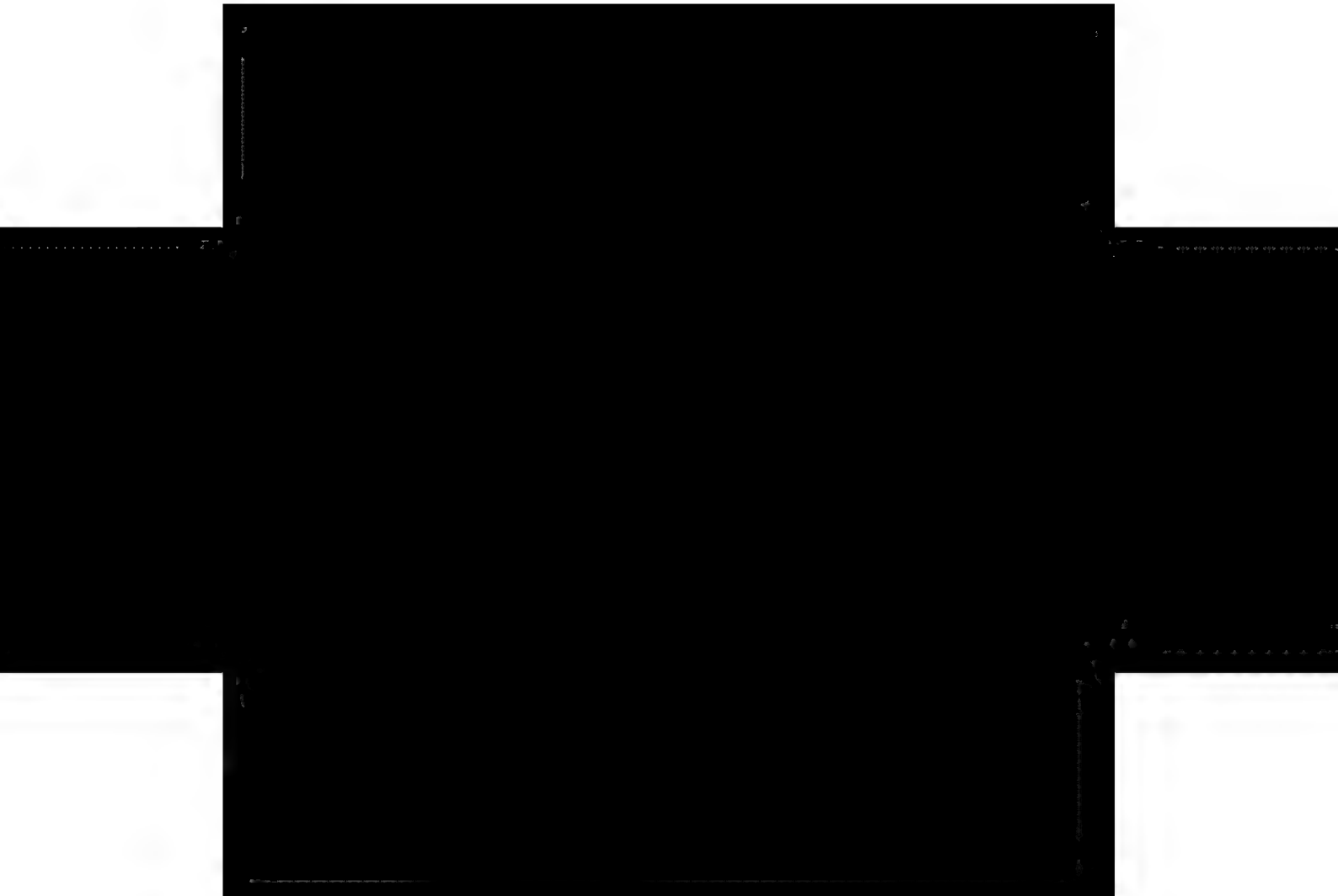
Рис. 112.



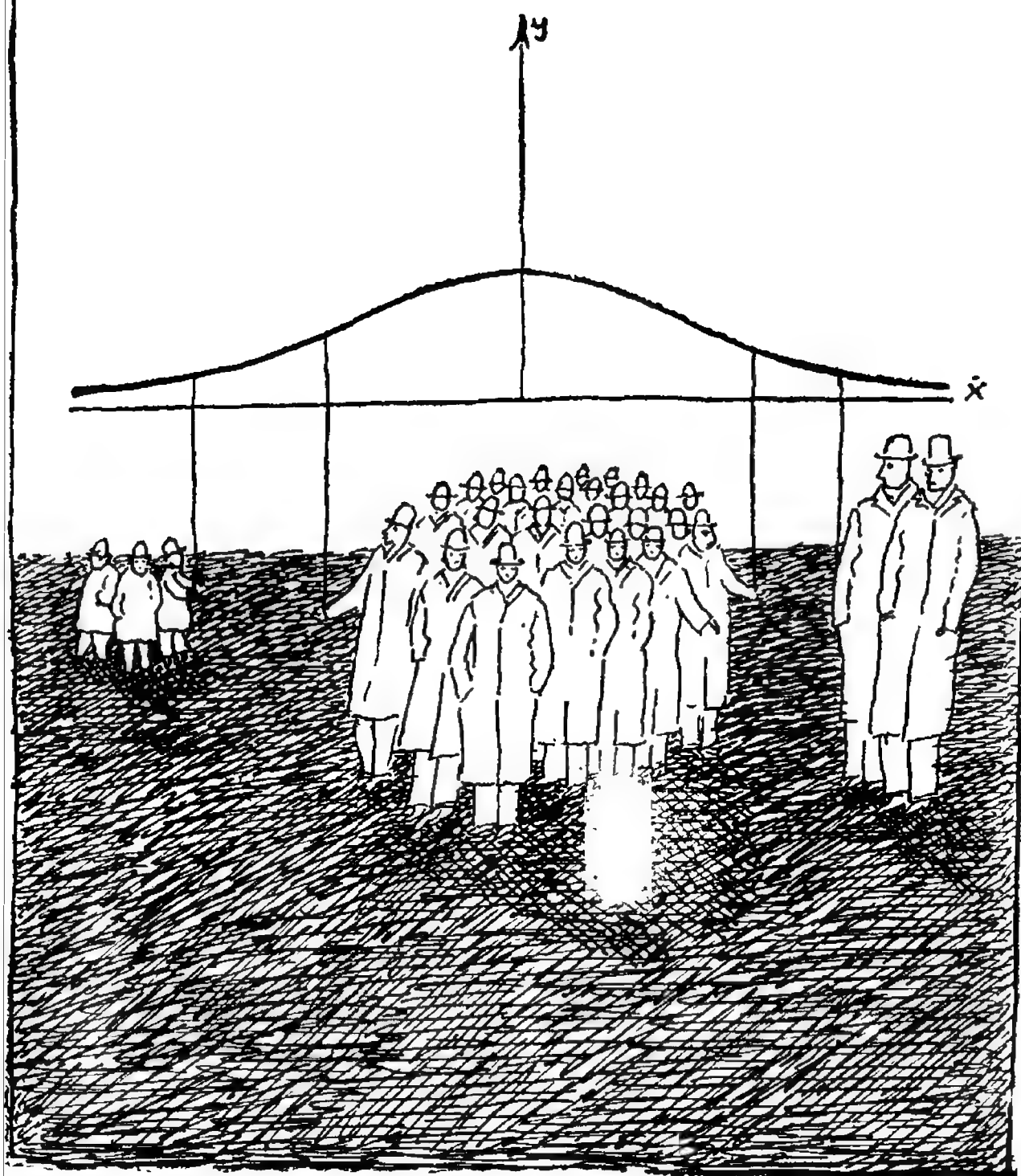
Решение этой задачи в свою очередь эквивалентно расстановке в клетках квадратной таблицы  $8 \times 8$  восьми чисел 1, 2, 3, ..., 8, при которой ни одно из чисел ни в одном столбце и ни в одной строке не встречается дважды. Приведем примеры таких таблиц:

1	2	3	4	5	6	7	8	5	6	7	8	4	3	2	1
2	3	4	5	6	7	8	1	6	5	8	7	3	4	1	2
3	4	5	6	7	8	1	2	7	8	5	6	2	1	4	3
4	5	6	7	8	1	2	3	8	7	6	5	1	2	3	4
5	6	7	8	1	2	3	4	4	3	2	1	5	6	7	8
6	7	8	1	2	3	4	5	3	4	1	2	6	5	8	7
7	8	1	2	3	4	5	6	2	1	4	3	7	8	5	6
8	1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	4	8	7	6	5

Ясно, что таких таблиц можно составить очень много, взяв, например, первую из выписанных таблиц и произведя в ней все возможные перестановки столбцов или строк.



# ЧЕМ ЗАНИМАЕТСЯ И ЧЕМ НЕ ЗАНИМАЕТСЯ МАТЕМАТИКА?



Математика — царица всех наук. Ее возлюбленный — истина, ее наряд — простота и ясность. Дворец этой владычицы окружен тернистыми зарослями, и, чтобы достичь его, каждому приходится продираться сквозь чащу. Случайный путник не обнаружит во дворце ничего привлекательного. Красота его открывается лишь разуму, любящему истину, закаленному в борьбе с трудностями, свидетельствующему о незаурядности и непреодолимой склонности человека к необычайно запутанным, но неиссякаемым и возвышенным наслаждениям ума, свойственным самой природе людей.

Ян Снядецкий

**Э**та статья не требует длинного предисловия. Она предназначена не для искушенных математиков, а для тех, кто просто интересуется проблемами их науки.

Профессионал-математик не найдет в ней ничего, о чем ему не приходилось бы слышать на лекциях. Более того, его поразит, что многие задачи, о которых мы будем говорить, сформулированы неточно, а их решения недостаточно обоснованы, хотя это вполне объяснимо: ведь мы предлагаем читателю не математический труд, а всего лишь очерк *о математике*. Для понимания его достаточно владеть математикой в объеме, не превышающем курс средней школы. Однако у некоторых читателей и эти скудные сведения могли улетучиться из памяти, в этом случае чрезвычайно желательно, чтобы они предварительно освежили и пополнили свои знания.

Если создание популярной книги по математике сопряжено с немалыми трудностями, то сжатый и в то же время популярный очерк «высшей математики» — задача попросту невыполнимая. Математический метод требует строгого и подробного доказательства теорем. Легкость математики основана на возможности чисто логического ее построения, трудность, отпугивающая многих, — на невозможности иного изложения. Для значительной части людей постепенное восхождение от простейших утверждений ко все более и более сложным

заклучениям — занятие чрезмерно изнурительное. Они хотели бы идти «царской тропой», которой, как говорили древние, в математике не существует. Популяризатор, сокращая доказательства и заменяя их простым уведомлением о конечных результатах рассуждений, оказывает читателю дурную услугу, поскольку математические факты в отличие от фактов экспериментальной физики или биологии сами по себе нельзя считать ни понятными, ни интересными, по крайней мере если нет строгого определения соответствующих понятий. Например, тот факт, что отношение длины окружности к ее диаметру равно  $3,141592606\dots$ , вряд ли вызовет особый интерес, а теорема о том, что замкнутая кривая делит плоскость на две части (внутреннюю и внешнюю), покажется незнакомым с ее доказательством до смешного банальной. Таким образом, если мы захотим ограничиться кратким очерком математики, то сможем охватить лишь какой-то сравнительно небольшой ее раздел. Если же нам потребуется нарисовать общую картину хотя бы одной из наиболее важных математических дисциплин, то наш обзор разрастется до размеров обширного руководства по этой дисциплине, доступного лишь узкому кругу специалистов.

Учитывая это, мы не стремились к изложению всей математики, а ограничились рядом замечаний о том, что такое математика, стараясь придать им форму бесед, которые происходят по разным поводам между математиками и теми, кто не знаком с «царицей всех наук».

Каждому же, кто желает изучить математику всерьез, мы настоятельно советуем идти обычным путем упорных занятий и чтения математических книг.

*Алгебра — это та же геометрия, лишь оперирует она символами. Геометрия — не что иное, как алгебра, воплощенная в фигурах.*

*Софи Жермен*

## **I. ОПРЕДЕЛЕНИЕ МАТЕМАТИКИ**

*Вопросы. — Упреки. — Предмет математики. — Элементарная и высшая математика. — Развитие математики. — Числа. — Аналитическая геометрия. — Символы.*

Математику чаще всего приходится слышать от непосвященных два вопроса:

1. Для чего нужна математика?
2. Продолжает ли математика развиваться и ныне?

Первый вопрос выражает сомнение, которое охватывает каждого, кто узнаёт, что плоды абстрактного мышления используются в повседневной жизни, второй — молчаливо выражает неуверенность в том, следует ли вообще считать математику наукой. Действительно, многие полагают, что в науке всегда есть нерешенные проблемы, возникают различные мнения, происходит борьба взглядов. Иначе говоря, наука должна развиваться, а о каком развитии и о каких нерешенных задачах можно говорить там, где (как в математике) все ясно, определено и установлено еще много веков назад? Именно второй вопрос, задаваемый особенно часто, нередко сопровождается еще одним вопросом, формулируемым либо как упрек в духе известных строк Гете\*,

---

\* Искусство хитрое цифири  
Нас учит: дважды два — четыре,  
И помогает нам понять,  
Как ложь за истину принять.



либо как сомнение в степени достоверности и важности математической науки. По существу мы встречаемся здесь с тем же явлением, которое заметили художники, поэты и ученые всех эпох: всякий раз, когда широкие круги публики сталкиваются с чем-то сложным в искусстве или в науке, они сначала объявляют поразивший их факт бессмысленным и лишь потом, много времени спустя, решаются признать, что он имеет смысл и даже становится ясным, если не пожалеть труда и подготовиться к его восприятию.

Зная это, нетрудно дать себе хороший совет: на все вопросы отвечать исчерпывающим образом. Опровергнуть все упреки также несложно. В затруднительном положении мы окажемся лишь тогда, когда кто-нибудь спросит: *«Что такое математика?»*

Ответить на этот вопрос было бы легче, если бы нам удалось определить предмет математики — то, чем она занимается. Может показаться, что сделать это совсем нетрудно: математика изучает *числа*. Однако не каждое утверждение о числах относится к математике. Например, утверждение «Луна три раза выглядывала из-за тучи» вряд ли стоит считать математическим, и в то же время геометрию нельзя не причислить к математике. Даже если бы мы ограничили предмет математики числами, нам все равно не удалось бы избежать трудностей, связанных с тем, что самое понятие числа *изменялось* со временем. Для древних греков числами были 1, 2, 3, ..., 1000, ..., 10 000, ... Нуль и отрицательные числа еще не были известны. В средние века не существовало понятия мнимого числа, а в первой половине XIX века — понятия совершенного числа Кантора. Объем понятия числа все время меняется.

Эту трудность мы могли бы преодолеть, заявив, что математика каждой эпохи занимается теми числами, которые известны в данную эпоху. Однако при этом читатель остался бы в неведении относительно того, чем будет заниматься математика завтра, тем более что при введении новых разновидностей чисел ими пользуются широко и вольно, не заботясь о строгом обосновании.

Наконец, мы могли бы согласиться, что знаем, о чем идет речь, когда кто-то произносит слово «число», так же, как физик знает, о чем идет речь, когда кто-то произносит слово *материя*, хотя установить содержание по-

следнего понятия было бы трудно. Но если физик может в качестве примеров указать на общеизвестные материальные предметы и затем, постепенно абстрагируясь, дойти до понятия материи, то в математике подобный подход в лучшем случае позволил бы дойти до натуральных чисел (то есть до чисел 1, 2, 3, 4, ...).

В связи с этими трудностями иногда даже высказывают мнение, что определение математики вообще невозможно, поскольку каждая культура обладает своей особой математикой и эти различные «математики» не образуют единой науки.

Не следует думать, что трудности, о которых идет речь, обнаруживаются лишь в области высшей математики.

Деление математики на *элементарную* и *высшую* носит довольно искусственный характер. Обычно к высшей относят те разделы математики, которые используют понятия *предела* и *сходящейся последовательности*. Сходящейся последовательностью называется бесконечный набор чисел, например

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{1000}, \dots, \frac{1}{10\,000}, \dots,$$

или

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots, \frac{100}{101}, \dots, \frac{1000}{1001}, \dots,$$

или

$$\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}, \frac{5}{4}, \dots, \frac{50}{51}, \frac{52}{51}, \dots, \frac{502}{501}, \dots$$

По мере продвижения от начала числа, образующие первую последовательность, все меньше и меньше отличаются от нуля. Ноль — это предел первой *последовательности*. Числа, образующие вторую и третью последовательность, стремятся к 1. Единица служит *пределом* второй и третьей *последовательностей*. Понятия предела и сходящейся последовательности, три примера которых мы только что привели, лежат в основе *дифференциального* и *интегрального исчисления*. Иногда в этих понятиях усматривают наиболее характерные, отличительные особенности высшей математики. В то же время и понятие предела, и понятие сходящейся последовательности носят довольно специальный характер. По-видимому, естественнее было бы сказать, что высшая

математика начинается там, где в игру вступают *бесконечные множества*.

Каждая из рассмотренных нами трех последовательностей содержит бесконечно много членов. Например, в первой последовательности столько различных членов  $1/n$ , сколько различных значений может принимать знаменатель  $n$ , а их в свою очередь бесконечно много (1, 2, 3, ...), ибо какое бы значение ни принимало натуральное число  $N$ , всегда найдется число  $N + 1$ , которое еще больше. Отсюда мы заключаем, что даже множество простейших натуральных чисел бесконечно. Правда, в обычных арифметических выкладках мы не оперируем со всем множеством, но если нам потребуется доказать даже самые простые теоремы о натуральных числах или высказать какое-нибудь утверждение о свойствах *всех* натуральных чисел, то мы будем вынуждены рассматривать все бесконечное множество. Таким образом, с бесконечными множествами мы встречаемся еще в элементарной математике.

Возникает вопрос, как обстоит дело в других науках, например в физике: столь же трудно поддается определению и классификации их предмет? Что касается физики, то, насколько можно судить, впечатление, что определить ее предмет якобы легче, обманчиво. На первый взгляд кажется, будто физика имеет дело с реальным внешним миром, с той или иной действительностью, не зависящей от познающего ее человека, в то время как математика является продуктом абстракции и, следовательно, созданием разума познающего. Однако при более близком рассмотрении все предстает в ином свете. Физик не довольствуется непосредственно данными ощущениями, а путем размышлений конструирует из того, что видит и слышит, незримый, неслышимый, неосязаемый мир атомов, электронов и т. д. Математик не останавливается на рассуждениях, а в своих доказательствах доискивается до последней инстанции — аксиом логики и теории множеств, о которых, разумеется, из *внешних* ощущений нельзя извлечь никаких сведений.

Предпримем еще одну попытку дать определение математики и скажем, что математика — это формальная наука о некоторых символах и правилах, которым подчиняются операции над символами. Нетрудно видеть, что и эта попытка не приводит к желаемому результату,

поскольку та же теория игры в шахматы, не будучи математикой, также изучает «символы и правила, которым подчиняются операции над символами». В то же время математикой вполне возможно (хотя и чрезвычайно неудобно) заниматься, не прибегая к символическим обозначениям, и формулировать теоремы чисто словесно, например, так: «Величина суммы не зависит от порядка слагаемых» (вместо  $a + b = b + a$ ). Таким образом, и это определение математики не заслуживает доверия.

Обратимся к истории математики; может быть, там нам удастся найти указания, которые позволили бы понять, в каком направлении следует двигаться, чтобы прийти к определению предмета математики: как-никак люди во все времена знали или по крайней мере задумывались над тем, чем занимается и чем не занимается математика.

Из истории известно, что даже у первобытных людей была своя математика, которая сводилась к умению считать и записывать результаты счета. Можно предположить, что самые древние математические задачи возникли в связи с практическими потребностями. Охота и скотоводство привели первобытного человека к необходимости сравнивать численность стад. Некоторые усматривают источники понятия числа в слуховых впечатлениях, однако письменные исторические памятники и предметы, сохранившиеся до наших дней от весьма давних времен и культур, еще раз подтверждают, что стимулом математических открытий были практические потребности: измерение ширины рек, ориентация в открытом море и календарь — вот первые задачи прикладной математики.

Самым древним из дошедших до нас письменных математических документов является хранящийся в Британском музее папирус (XIX в. до н. э.), известный как «Расчетная книга писца Ахмеса». Его расшифровали египтолог Эйзенлор и историк математики М. Кантор. Ахмес уже знал целые числа и дроби. В его книге мы находим такие примеры:

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}, \quad \frac{2}{49} = \frac{1}{28} + \frac{1}{196},$$
$$\frac{7}{29} = \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{58} + \frac{1}{87} + \frac{1}{232}.$$

Вообще же разбиение произвольных дробей на дроби с числителем, равным единице, было главной задачей Ахмеса. Умел он решать и уравнения первой степени с одним неизвестным (имевшим особое название), хотя общей теории еще не было, и даже находить сумму конечного числа членов геометрической прогрессии. Из геометрических задач Ахмес занимался *квадратурой круга*. Приведенное в папирусе отношение длины окружности к диаметру равно  $(\frac{16}{9})^2 = 3,16$ , что лишь на 0,018... отличается от истинного значения  $\pi$ .

Китайцы, которые изобрели числа около 2600 г. до н. э. и знали, как свидетельствует «Священная книга счета» (XII в. до н. э.), что треугольник со сторонами 3, 4, 5 — прямоугольный, примерно в то же время считали, что  $\pi = 3$  (то же значение  $\pi$  приводится и в Библии).

Греки вывели математику из детской стадии ее развития. Пифагору (VI в. до н. э.) приписывают изобретение иррациональных чисел. Если стороны квадрата равны 1, то нетрудно доказать, что его диагональ нельзя представить в виде дроби  $p/q$ . Действительно, предположим, что стороны квадрата равны 1, а его диагональ —  $p/q$  ( $p$  и  $q$  — натуральные числа). Тогда по теореме Пифагора

$$1^2 + 1^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2, \quad \text{или} \quad 2 = \frac{p^2}{q^2},$$

откуда

$$2q^2 = p^2.$$

Следовательно, число  $p^2$  четное и число  $p$  также четное. Разделив  $p$  на 2, получим целое число  $p_1$ , откуда

$$p = 2p_1,$$

или

$$2q^2 = p^2 = (2p_1)^2 = 4p_1^2, \quad q^2 = 2p_1^2.$$

Таким образом, число  $q^2$ , а следовательно и  $q$ , оказывается четным:  $q = 2q_1$ .

Но тогда

$$q^2 = 4q_1^2 = 2p_1^2, \quad p_1^2 = 2q_1^2.$$

Следовательно,  $p_1^2$  и  $p_1$  — четные числа.

Продолжая рассуждения, получаем

$$p = 2p_1, \quad p_1 = 2p_2, \quad p_2 = 2p_3, \quad \dots \text{ и т. д.}$$

Число  $p$  — натуральное, его половину  $p_1$  мы делим на 2 и снова получаем натуральное число  $p_2$ . Разделив  $p_2$  на 2, мы получаем натуральное число  $p_3$  и т. д. Ясно, что делить неограниченно долго натуральное число на 2 и получать при этом натуральные числа невозможно. Следовательно, предположение о том, что диагональ квадрата со стороной 1 равна  $p/q$ , привело нас к противоречию. Таким образом, длину диагонали единичного квадрата нельзя выразить рациональным числом. Она равна иррациональному числу, квадрат которого равен 2. Это число мы обозначим  $\sqrt{2}$ . Согласно Платону, Теодор из Киренаики уже знал, что  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{5}$ ,  $\sqrt{7}$ ,  $\sqrt{8}$ ,  $\sqrt{10}$ ,  $\sqrt{11}$ ,  $\sqrt{12}$ ,  $\sqrt{13}$ ,  $\sqrt{14}$ ,  $\sqrt{15}$ ,  $\sqrt{17}$  — не рациональные числа. Что же касается числа  $\sqrt{2}$ , то строгое доказательство его иррациональности без ссылки на источник имеется у Аристотеля.

Греческая математика развивалась на решении трех знаменитых задач: *квадратуры круга, трисекции угла и удвоении куба*. Все три задачи — это геометрические задачи на построение. Первая задача сводится к построению числа  $\pi$  (то есть отрезка длиной в  $\pi$  единиц), третья — к построению числа  $\sqrt[3]{2}$ , вторая — к разбиению произвольного угла на три равные части. Современная математика решила все три задачи, причем отрицательно.

В 1882 г. Линдемман доказал неразрешимость задачи о квадратуре круга, то есть доказал, что с помощью циркуля и линейки по данному диаметру круга нельзя построить отрезка прямой, длина которого была бы равна  $\pi$ . Неразрешимость квадратуры круга связана не с иррациональностью числа  $\pi$  (поскольку, например, число  $\sqrt{2}$  также иррационально, но построить его с помощью циркуля и линейки тем не менее можно), а с тем, что оно *трансцендентно*, то есть не удовлетворяет ни одному уравнению с рациональными коэффициентами. (В отличие от  $\pi$  число  $\sqrt{2}$  удовлетворяет, например, уравнению  $1 \cdot x^2 + 0 \cdot x + (-2) = 0$  с коэффициентами 1, 0,  $-2$ .)

Число  $\sqrt[3]{2}$  — длина ребра куба объемом в 2 кубические единицы — не трансцендентное, но построить его все же нельзя, хотя и по иной причине. Как доказано



уже в новое время, с помощью циркуля и линейки можно построить лишь такие числа, которые получаются при решении квадратных уравнений с коэффициентами, также доступными построению с помощью циркуля и линейки. Поясним нашу мысль несколько подробнее.

Предположим, что нам задан единичный отрезок. Тогда мы можем сначала построить все отрезки, длина которых будет целой кратной единичного (то есть отрезки длиной в 2, 3, 4, 5 и т. д. единиц), затем — отрезки первого типа, длины которых совпадают с корнями уравнений первого порядка с целыми коэффициентами (то есть отрезки  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{2}{5}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{3}{4}$ , ... и т. д.), затем — отрезки второго типа, длины которых совпадают с корнями уравнений второго порядка с коэффициентами из чисел первого типа (то есть числа  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{2}/\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ , ... и т. д.). Отрезки третьего типа мы получим из отрезков второго типа, так же как получали отрезки второго типа из отрезков первого типа. Аналогично можно построить отрезки третьего, четвертого и более высоких типов.

Число  $\sqrt[3]{2}$  не целое и не принадлежит ни к числам первого типа, ни к числам второго типа, ни к числам третьего типа и вообще не принадлежит к числам любого из более высоких типов, поэтому построить его с помощью циркуля и линейки нельзя. Аналогично доказывается и невозможность трисекции угла.

К сообщенным нами историческим сведениям необходимо добавить несколько слов о самом известном из памятников греческой математики — сочинении Евклида «Элементы». Семьдесят поколений изучали геометрию по «Элементам» Евклида, ставшим образцом, своего рода эталоном математического метода. Деление утверждений на аксиомы ( $\alpha\chi\iota\omega\mu\alpha\tau\alpha$ ), постулаты ( $\alpha\iota\tau\eta\mu\alpha\tau\alpha$ ), определения ( $\delta\epsilon\omicron\tau\iota$ ), теоремы ( $\theta\epsilon\omega\rho\eta\mu\alpha\tau\alpha$ ), задачи ( $\pi\rho\omicron\beta\lambda\eta\mu\alpha\tau\alpha$ ) и вспомогательные теоремы ( $\lambda\eta\mu\mu\alpha\tau\alpha$ ), впервые введенные Евклидом, сохранились и поныне в работах математического содержания. «Элементы» стали своеобразной энциклопедией математики того времени, изложенной в геометрической форме.

Характерная особенность сочинения Евклида — строгость доказательств, весьма часто проводимых «от



противного». Вот, например, доказательство 20-й теоремы из IX книги «Элементов»: «Существует неограниченно много простых чисел». Поясним, что простым называется целое число, большее 1, которое делится только на самое себя и на 1. Таким образом, 2, 3, 5, 7, 11 — простые числа, а числа 4, 6, 8, 9 — не простые (составные). Доказательство Евклида исходит из предположения о том, что множество простых чисел *конечно*. Тогда существует наибольшее простое число  $p$ . Составим произведение  $\Pi = 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \dots \times p$  всех чисел от 2 до  $p$  и рассмотрим число  $N = \Pi + 1$ , то есть число, которое на 1 больше этого произведения. Число  $N$  заведомо больше  $p$ , поскольку даже произведение  $\Pi$  больше  $p$ . Поскольку по предположению  $p$  — наибольшее простое число,  $N$  не может быть простым числом. Но каждое непростое (составное) число делится на какое-нибудь простое число. Как же обстоит дело с числом  $N$ ?

При делении на 2 число  $N$  дает в остатке 1, поскольку на 2 делится произведение  $\Pi$  ( $\Pi/2 = 3 \times 4 \times 5 \times \dots \times p$ ), а  $N = \Pi + 1$ . При делении на 3 число  $N$  также дает в остатке 1, поскольку на 3 делится произведение  $\Pi$ , а  $N = \Pi + 1$ . Вообще, на какое бы число 2, 3, 4 ...,  $p$  мы ни делили  $N$ , остаток всегда будет равен 1. Следовательно,  $N$  не делится ни на одно из чисел 2, 3, ...,  $p$ , а поскольку среди этих чисел содержатся все простые числа (ибо по предположению  $p$  — наибольшее из всех простых чисел), то  $N$  не делится ни на одно простое число, что противоречит ранее высказанному утверждению ( $N$ , как всякое составное число, должно делиться на одно из простых чисел). Полученное противоречие говорит о том, что сделанное вначале предположение о конечности множества простых чисел ложно. Следовательно, простых чисел *бесконечно много*, что и требовалось доказать.

В доказательстве Евклида ощущается уверенное владение логическим аппаратом, строгость этого доказательства безупречна. *Прямое* доказательство (без ложного предположения), несомненно, было бы более удовлетворительным. Некоторым людям, не привыкшим к рассуждениям такого рода, доказательство от противного кажется неестественным.

Но вернемся к определению того, что такое математика. Даже те немногочисленные примеры из античной и современной математики, которые мы привели, должны убедить нас в том, что у математики имеются свои задачи, требующие для решения усилий нескольких поколений, что она непрерывно развивается, ее результаты используются на практике и прежде всего что у нее есть свой особый метод и что именно этот метод, а отнюдь не числа, не символы и не геометрические фигуры составляет наиболее характерную отличительную черту математики. Метод этот, которому мы посвятим целый раздел, называется дедуктивным. Сущность его сводится к выводу логических следствий из аксиом и определений, заложенных в основании математической теории. Именно в дедуктивном методе вполне справедливо усматривают причину надежности и точности математических утверждений. Восхищенный «Элементами» Евклида философ Спиноза в своей «Этике» хотел все изложение построить «на геометрический манер», однако, хотя он старательно скопировал внешнюю структуру «Элементов», его ожидало фиаско. В разделе IV мы еще остановимся на причинах неудачи, постигшей Спинозу.

К каким объектам применим дедуктивный метод? О каких объектах говорится в аксиомах и теоремах? Условимся (разумеется, временно) отождествлять эти объекты с числами (тем самым мы пока оставляем в стороне всю геометрию). Естественно возникает вопрос: какие же разновидности чисел известны в современной математике?

На первом месте стоят *натуральные числа*: 1, 2, 3, ..., ..., 10, ..., 20, ....., 100, .... Затем идет ноль, неизвестный древним грекам. Число ноль ввели в математику индусы. Ноль совершенно незаменим в арабской, то есть принятой в наше время, системе записи чисел. С натуральными числами связаны *дроби*, известные, как мы видели, еще египтянам:  $\frac{1}{2}$ ,  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{3}{4}$ , .... Если к натуральным числам присоединить 0 и целые *отрицательные* числа  $-1$ ,  $-2$ ,  $-3$ , ..., то получатся *целые* числа. Положительные и отрицательные дроби вместе с целыми числами образуют множество *рациональных* чисел. Присоединив к этому множеству положительные и отрицательные *иррациональные* числа (известные еще грекам), получим множество *действительных* чисел. Их

в свою очередь можно разбить на *трансцендентные* числа (например, число  $\pi$ ), не являющиеся корнями уравнений с рациональными коэффициентами, и остальные, так называемые *алгебраические* числа. Помимо действительных чисел, математика знает *комплексные* числа  $a + bi$ , ( $i = \sqrt{-1}$ ), *векторы*, *кватернионы*, *идеалы* и много других объектов, также называемых числами\*.

Для чего математики вводят новые числа? Для того, чтобы те или иные операции можно было производить *во всех случаях, без исключений*, которые приходится особо оговаривать, если ограничиться уже известными числами. Например, *сложение* всегда можно производить над натуральными числами и получать в результате снова натуральные числа. Зато *вычитание* не всегда выполнимо в области положительных чисел. Предположим, например, что нам необходимо из трех вычесть пять, то есть найти число, которое после прибавления его к пяти даст три. Среди положительных чисел такого числа просто нет. Чтобы вычитание стало выполнимым и в этом случае, необходимо ввести отрицательные числа (в рассмотренном примере  $-2$ ). *Деление* целых чисел приводит к необходимости введения дробей (типа  $1/2$ ), *извлечение* квадратного корня и корней более высоких степеней — к появлению иррациональных чисел (например,  $\sqrt{2}$ ). Векторы и кватернионы были вызваны к жизни потребностями механики, когда возникла необходимость иметь дело с «направленными величинами». Комплексные числа были введены в математику в связи с *решением уравнений* с действительными коэффициентами (например, уравнение  $x^2 + 1 = 0$ , которое не имеет действительных корней). Мы видим, что при так называемом расширении понятия числа математики имели в виду не только создание чего-то нового, но и усовершен-

---

Строго говоря, никакого расширения понятия числа при переходе от действительных чисел к комплексным не происходит. Запись  $i = \sqrt{-1}$  представляет собой не более чем удобное сокращение. Следовало бы писать  $0 + 1 \cdot i = \sqrt{-1} + 0 \cdot i$ . Кроме того,  $a + bi$  означает упорядоченную пару действительных чисел  $(a, b)$ . Равенство же  $-1 + 0 \cdot i = -1$ , строго говоря, не имеет смысла, поскольку знак равенства ( $=$ ) означает, что справа и слева от него стоят *одинаковые* предметы, а пара предметов не тождественна одному предмету.

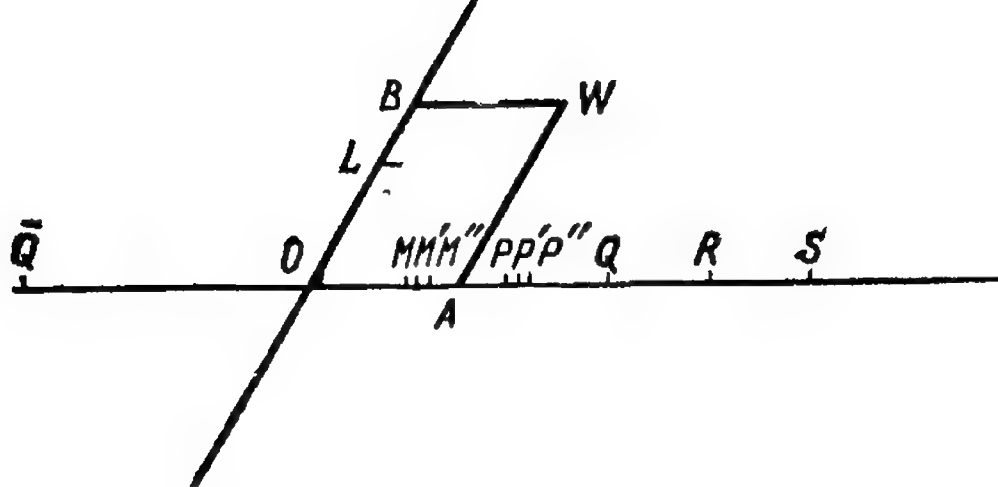


Рис. 1.

ствование старого. Новые числа были введены не ради их новых свойств, а для решения старых задач.

Со временем математики начали интерпретировать числа геометрически. Так произошел переход от чисел к другому, не менее важному разделу математики — к геометрии. Мостом, связавшим числа с геометрией, стала *аналитическая геометрия*, созданная Рене Декартом (1637 г.).

Представим себе, что из точки  $O$  в горизонтальном направлении проведен луч (рис. 1). Отложим на нем отрезок  $OM$  и примем расстояние  $OM$  за единицу длины. Отложим на луче от точки  $M$  еще один единичный отрезок, получим новую точку  $P$ . Продолжая откладывать единичные отрезки, найдем точки  $Q, R, S, \dots$  и т. д., при этом длины всех отрезков  $OM, MP, PQ, QR, RS, \dots$  будут равны между собой (и равны единице). Будем считать, что точки  $O, M, P, Q, R, S, \dots$  — это «образы» чисел  $0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$ . Разделив отрезки  $OM, MP, \dots$  точками  $M', M'', \dots, P', P'', \dots$  и т. д. на равные части, например на 10 равных частей, будем рассматривать точку  $M'$  как образ числа  $0,4$ , точку  $M''$  — как образ числа  $0,8, \dots$ , точку  $P'$  — как образ числа  $1,4$  и т. д. Продолжая деление отложенных единичных отрезков на все большее число частей, мы в конце концов получим на нашем луче образ  $Q$  любого вещественного положительного числа  $q$  (для этого нам потребуется отложить на луче от точки  $O$  в направлении  $\vec{OM}$  расстояние  $OQ$ , равное — с требуемой точностью — числу  $q$ ). Теоретически можно считать, что соответствие между

точками луча и вещественными числами абсолютно точно.

Чтобы получить образ отрицательного числа  $-q$ , достаточно продолжить луч за точку  $O$  (в сторону, противоположную  $\overrightarrow{OM}$ ) и отложить в том направлении отрезок  $O\bar{Q}$ , длина которого равна  $q$ . Конец  $\bar{Q}$  этого отрезка и будет геометрическим образом отрицательного числа  $-q$ .

Выберем теперь новую точку  $L$ , не лежащую на прямой  $\bar{Q}OQ$ , и проведем через нее прямую  $OL$ . Условимся на новой прямой измерять расстояния в единицах  $OL$  и построим на ней еще раз образы всех действительных чисел.

Прямые  $OL$  и  $OM$  назовем *осями координат*: прямую  $OM$  — *осью абсцисс*, прямую  $OL$  — *осью ординат*. Задав на плоскости, проходящей через оси  $OM$  и  $OL$ , точку  $W$ , мы можем описать ее положение следующим образом. Проведем через  $W$  прямую, параллельную оси ординат. Эта прямая пересечет ось абсцисс в некоторой точке  $A$ . Прямая, проходящая через точку  $W$  параллельно оси абсцисс, пересечет ось ординат в точке  $B$ . Зная точки  $A$  и  $B$  и проводя через них прямые, параллельные осям координат, мы получим  $W$  как точку пересечения этих прямых. Но вместо того, чтобы задавать точки  $A$  и  $B$ , достаточно указать те числа  $a$  и  $b$ , образами которых являются эти точки.

Оказывается, что любую точку  $W$  на плоскости можно задать с помощью двух чисел  $a$  и  $b$ , называемых координатами этой точки ( $a$  — *абсцисса*,  $b$  — *ордината*). Наоборот, зная точку  $W$ , можно найти ее координаты  $a$ ,  $b$  с помощью того же построения, что и раньше, но проводимого с конца к началу.

Выясним, в каком случае абсцисса  $a$  равна нулю. При  $a = 0$  точка  $A$  на оси  $OM$  должна соответствовать нулю. Но поскольку на оси  $OM$  лишь точка  $O$  соответствует нулю, то точка  $A$  должна совпадать с  $O$ . Точка  $O$  принадлежит не только оси  $OM$ , но и оси  $OL$ . Прямая  $WA$ , или (поскольку точки  $A$  и  $O$  совпадают)  $WO$ , параллельна оси  $OL$ . Следовательно, общую точку  $O$  с осью  $OL$  прямая  $WO$  может иметь лишь в том случае, если вся прямая  $WO$  совпадает с прямой  $OL$  — осью ординат. Верно и обратное утверждение: если прямые  $WO$

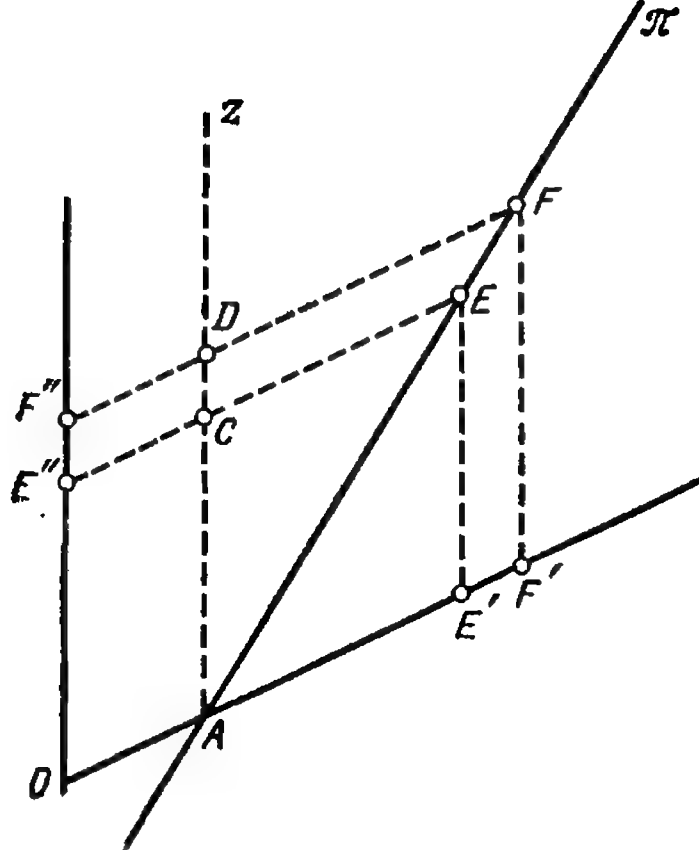


Рис. 2.

и  $OL$  совпадают, то абсцисса точки  $W$  равна нулю. Таким образом, ось ординат — это множество образов точек, абсциссы которых равны нулю.

Проведем теперь произвольную прямую  $\pi$  и спросим, что можно сказать о координатах ее точек. Предположим, что прямая  $\pi$  пересекает ось абсцисс в точке  $A$ , и проведем через  $A$  параллельно оси ординат прямую  $AZ$  (рис. 2). Выберем на нашей прямой  $\pi$  две точки  $E$  и  $F$  и проведем через них прямые  $EE'$  и  $FF'$ , параллельные оси ординат, и прямые  $EE''$  и  $FF''$ , параллельные оси абсцисс.

Прямые  $EE''$  и  $FF''$  пересекают прямую  $AZ$  в точках  $C$  и  $D$ . Треугольники  $AEC$  и  $AFD$  подобны, треугольники  $AE'E$  и  $AF'F$  также подобны. Следовательно,

$$\frac{AC}{AD} = \frac{AE}{AF} = \frac{AE'}{AF'},$$

или

$$\frac{AC}{AE'} = \frac{AD}{AF'}.$$

Но

$$AC = OE'' = AD = OF'',$$

откуда

$$\frac{OE''}{AE'} = \frac{OF''}{AF'}.$$

Таким образом, отношение длины отрезков  $OW''/AW'$  постоянно: оно одинаково для любой точки  $W$ , лежащей на  $\pi$ . Обозначим абсциссу точки  $W$  через  $x$ , ее ординату — через  $y$ . Тогда  $OW'' = y$ ,  $OW' = x$ ,

$$x = OW' = OA + AW' = a + AW',$$

или

$$x - a = AW'.$$

Подставляем в отношение  $OW''/AW'$

$$\frac{OW''}{AW'} = \frac{y}{x-a} = \text{постоянное число} = c,$$

откуда

$$y = c(x-a).$$

Так выглядит соотношение между абсциссой  $x$  и ординатой  $y$  произвольной точки  $W$ , лежащей на прямой  $\pi$ . Числа  $a$  и  $c$  в этом соотношении постоянные: если прямая  $\pi$  задана, то  $a$  и  $c$  имеют вполне определенные значения. Числа  $x$  и  $y$  не постоянные, а зависят от того, какую точку  $W$  прямой  $\pi$  мы рассматриваем. Соотношение  $y = c(x-a)$  (при заданных  $c$  и  $a$ ) выполняется для любой точки прямой  $\pi$  и только для точек прямой  $\pi$ . Это соотношение называется *уравнением прямой  $\pi$* .

Аналитическая геометрия изучает уравнения прямых, окружностей, эллипсов и других кривых. Решение геометрических задач она сводит к арифметическому изучению уравнений соответствующих геометрических объектов. Например, если нам потребуется доказать, что три высоты треугольника пересекаются в одной точке, то мы напишем уравнения трех прямых, на которых лежат высоты, и выясним, можно ли придать  $x$  и  $y$  такие значения  $a$  и  $b$ , чтобы удовлетворить всем трем уравнениям одновременно (то есть чтобы точка  $O$  с координатами  $a$  и  $b$  принадлежала одновременно всем трем прямым). Наоборот, пользуясь известными геометрическими свойствами, можно делать заключения об уравнениях. Известно, например, что две прямые либо не пересекаются (параллельны), либо пересекаются лишь в одной точке, либо полностью совпадают. Отсюда следует, что два уравнения первой степени с двумя неизвестными ( $x$  и  $y$ ) либо не имеют решения, либо допускают единственное решение, либо имеют бесконечно много решений (в последнем случае каждое решение одного уравнения служит решением другого \*).

---

\* Не все уравнения первой степени с двумя неизвестными являются уравнениями прямых. Например, уравнению  $O \cdot x + O \cdot y = 0$  соответствует вся плоскость, а уравнение  $O \cdot x + O \cdot y = 1$  не соответствует ничему. Это следует иметь в виду, когда мы говорим о геометрическом смысле уравнений первой степени: из того, что все решения одного уравнения удовлетворяют другому уравнению, отнюдь не следует, что и всякое решение второго уравнения есть в то же время решение первого уравнения.



Пример аналитической геометрии наводит на некоторые мысли относительно определения математики. Мы видим, что в математике может наблюдаться некоторый параллелизм: между объектами, не имеющими на первый взгляд ничего общего, например между «прямыми» и «уравнениями первой степени с двумя неизвестными», «точками» и «упорядоченными парами чисел», можно установить такое соответствие, что каждое геометрическое утверждение относительно прямых и точек будет допускать «перевод» на арифметический язык, и наоборот.

Представим себе теперь человека, которого ввели в заблуждение, сообщив, что когда говорят «уравнение первой степени с двумя неизвестными», то в действительности имеют в виду прямую, выражение «упорядоченная пара чисел» переводится на язык как «точка», а «удовлетворять уравнению» означает то же самое, что «лежать на прямой». Такой человек воспринял бы теорию уравнений первой степени с двумя неизвестными как раздел планиметрии, а если бы тот, кто ввел его в заблуждение, решил исправить свою ошибку и открыть истину, то не смог бы найти ни одного аргумента, который подтвердил бы правильность его слов, и был бы вынужден сослаться на установившуюся традицию, согласно которой точка называется «точкой» а не «упорядоченной парой чисел». Таким образом выясняется, что из некоторой неопределенности смысла выражений, означающих те или иные математические объекты, можно извлечь немалую выгоду, многократно усилить значимость наших рассуждений и доказательств, придавая полученным результатам тот смысл, который наиболее выгоден нам в данный момент.

К какому заключению приводят нас поиски определения математики? Мы видели, что математика — наука древняя, но непрестанно развивающаяся, возникшая из практических потребностей и связанная с реальным миром, и в то же время наука теоретическая, чьи проблемы не поддаются самым напряженным усилиям даже в тех случаях, когда речь идет о задачах, не представляющих никакого практического интереса, как, например, задача о квадратуре круга. Математика использует особый, дедуктивный, метод, а ее аксиомы и определения в значительной мере произвольны. Для того чтобы

понимать математические доказательства, необходимо привыкнуть к точному мышлению — к «математической строгости», однако для решения задач одной лишь строгости недостаточно, и порой проходили века и даже целые эпохи, прежде чем удавалось напасть на идею, без которой решить проблему было невозможно. Математика тесно связана с миром чисел, однако предмет ее значительно шире: как мы уже убедились, геометрию нельзя исключить из математики хотя бы потому, что при некоторой интерпретации арифметика переходит в геометрию. Если же согласиться считать обычную геометрию частью математики, то нам трудно будет исключить из числа математических дисциплин так называемую новую геометрию, обходящуюся без понятия величины (или, как принято говорить, без «метрики»), а использующую лишь такие понятия, как точка, прямая, плоскости, множество точек, пучок прямых, связка плоскостей и отношения типа «точка лежит на прямой», «прямая лежит на плоскости» и т. п. Таким образом, широко распространенное ранее и сохранившееся и поныне в нематематических кругах представление о математике как о науке, якобы изучающей числа и величины, глубоко неверно, и нам необходимо еще ближе познакомиться с современной математикой, чтобы узнать, чем она занимается и чем не занимается.

Еще несколько слов следовало бы сказать об одной особенности математики, нередко принимаемой за ее характерную и наиболее существенную черту. Я имею в виду использование символов. Математика действительно широко пользуется специальными обозначениями. Это неоднократно ставили ей в вину и даже упрекали математиков в чрезмерном увлечении символами — «символомании». Тем не менее использование символов отнюдь не более характерно для математического мышления, чем употребление их во французском или немецком языке.

Для чего вводятся в математике обозначения и каков их смысл? Каждая наука, результаты которой мы хотим сообщить другим людям, вынуждена использовать те или иные символы. Жесты глухонемого, речь простого крестьянина, специальные термины философа — все это символы. По мере того как расширяется и все более четко определяется область наших исследований,

мы создаем все новые и новые символы, образующие научную терминологию данной области. В математике действия, с которыми приходится сталкиваться особенно часто, например сложение или умножение, имеют свое обозначение ( $+$  и  $\cdot$ ). Свои обозначения (символы) имеют также отношение ( $:$ ), равенства ( $=$ ) и функциональная зависимость ( $\dots = f(\dots)$ ). Помимо этих «постоянных» обозначений, существует другая разновидность обозначений — «переменных», или «текущих». Чаще всего это просто буквы алфавита. Их вводят не раз и навсегда, а лишь на время и обычно поясняют словами: «Пусть  $a$  и  $b$  — произвольные числа». Новые обозначения вместо длинной фразы «Величина суммы двух чисел не зависит от порядка слагаемых» позволяют ограничиться записью:  $a + b = b + a$ . При этом мы выражаем свою мысль не только короче, но, смею сказать, даже яснее.

По сравнению со словесным выражением символ не только отличается краткостью и ясностью, но и обладает еще одним важным преимуществом, имеющим первостепенное значение для математики: сам по себе он ничего не обозначает. Лишь заглянув в список определений, можно узнать, что означает тот или иной символ. Поэтому производя над ним различные действия, мы должны хорошо знать, что он означает, ибо в противном случае дедукция легко приводит к абсурду. Например, буква  $a$  может означать в математике действительное число, мнимое число, вектор, точку, множество ..., то есть, попросту говоря, все, что угодно. Как известно, для действительных чисел выполняется переместительный закон умножения:  $a \cdot b = b \cdot a$ . Однако если математику попадет страничка, вырванная из чьей-то работы, и на ней формула  $a \cdot b$ , то он не осмелится дописать  $= b \cdot a$ , поскольку не будет знать, что означают величины  $a$ ,  $b$  и знак  $\cdot$ . Если, например,  $a$  и  $b$  — векторы, а  $(\cdot)$  — знак векторного умножения, то  $a \cdot b \neq b \cdot a$ , поскольку в этом случае при перестановке слагаемых векторное произведение меняет знак:  $a \cdot b = -b \cdot a$ .

Символомания, или страсть к бездумному, механическому манипулированию символами, чужда психологии математика. Немногих из тех, кто умеет правильно преобразовывать математические выражения, математик

назовет математиками. У этих людей отсутствует весьма важное качество (и чисто механическая работа не может восполнить недостаток): выводимые *математиком* соотношения должны быть как можно более простыми и должны проливать свет на вопросы, ответ на которые ранее не был известен. В этом смысле математика ничем не отличается от химии, в которой смешивание наугад различных кислот и комбинирование элементов вслепую совершенно бесплодно.

Иногда приходится слышать еще одно возражение, выдвигаемое против математической символики: утверждают, будто математические обозначения затрудняют чтение математических книг. Однако математические обозначения мешают лишь тем, кто их не знает, но точно такой же упрек каждый неграмотный может высказать по поводу любого печатного издания. Впрочем, не следует думать, будто для чтения математической литературы требуется знание нескольких сот символов. Одни символы известны всем математикам, другие вводятся различными авторами для более узких целей, и смысл таких обозначений особо определяется в каждой работе (или серии работ). Трудность восприятия математической литературы кроется не в обозначениях, а в рассуждениях, которые авторы работ никогда не излагают подробно, а лишь в сокращенном (иногда даже чрезмерно) виде, поскольку полное доказательство увеличило бы объем работы в несколько десятков раз.

Подробное изложение всех рассуждений позволило бы устранить все логические трудности, но чтение тривиальных рассуждений страница за страницей создало бы непривычные психологические трудности и явилось бы тяжким испытанием терпения читателя.

Математикой занимаются для того, чтобы убедиться, как далеко может уйти человеческий разум по пути чисто логических рассуждений.

Зигмунд Янишевский

## II. РАЗВИТИЕ МАТЕМАТИКИ

*История квадратуры круга. — Возникновение дифференциального и интегрального исчисления. — Развитие алгебры. — Теория вероятностей. — Теория множеств. — «Основания математики» Уайтхеда и Рассела. — Развитие геометрии. — Приложения. — Организация математики.*

В предыдущем разделе мы уже упоминали о древней задаче — *квадратуре круга*. Историю этой задачи по праву можно считать наиболее убедительным доказательством эволюции математической мысли и прогресса математики. Огромная популярность квадратуры круга объясняется тем, что постановка задачи понятна всякому, даже тем, кто не имеет специального математического образования.

В чем заключается задача о квадратуре круга? Еще во второй половине V в. до н. э. Гиппократ из Хиоса (первый человек, который стал читать в Греции платные лекции по математике) сформулировал теорему: «Площадь круга  $P$  пропорциональна квадрату радиуса  $r$ :  $P = \pi r^2$ ». В задаче о квадратуре круга речь идет о нахождении коэффициента пропорциональности — числа  $\pi$ . Такова первая интерпретация квадратуры круга.

Существует и вторая интерпретация той же задачи. На этот раз квадратура круга рассматривается как геометрическая задача на построение: с помощью циркуля и линейки построить сторону квадрата, равновеликого данному кругу.

В истории математики оба варианта задачи о квадратуре круга сыграли важную роль. Точное вычисление  $\pi$  потребовало разработки соответствующих методов, значение которых, как выяснилось позднее, вышло далеко за рамки частной задачи.

Геометрический вариант задачи о квадратуре круга на протяжении двух тысячелетий не поддавался усилиям лучших математиков. Выяснение причин загадочного «упорства» — строгое доказательство неразрешимости задачи о квадратуре круга с помощью только циркуля и линейки — стало заслугой математики нового времени, в особенности двух ее представителей Ш. Эрмита и Ф. Линдемана.

Некоторое представление об огромном объеме работы, проделанной учеными, которые на протяжении многих веков бились над квадратурой круга, дает следующий хронологический список различных приближенных значений  $\pi$  (само обозначение числа  $\pi$  было впервые введено в XVIII в. Эйлером):

3 — Библия (дата неизвестна,,

$\left(\frac{16}{9}\right)^2$  — Ахмес, писец фараона Аменемхета III (около 2000 г. до н. э.);

$3\frac{1}{7}$ ,  $3\frac{10}{71}$  — Архимед (287—212 гг. до н. э.);

$3\frac{17}{120}$  — Птолемей (125—141 гг. н. э.);

3 — Чу-бэй-Суан-кян (III в.);

$\frac{157}{50}$  — Линь Хун (V в.);

$\frac{62\,832}{20\,000} = 3,1416$  — Арьябхатта (род. в 476 г.);

$\sqrt{10}$  — по древнеиндийской традиции приводит в своем сочинении Брахмагупта (род. в 598 г.);

$\left. \begin{array}{l} \frac{3927}{1250} \\ \frac{754}{240} \end{array} \right\}$  — Бхаскара (род. в 1114 г.);

$\sqrt{8}$  — Михаил Пселл, византийский энциклопедист (X в.);

$3\frac{1}{8}$  — «Мних Б.» (первая половина XI в.);

$\left(\frac{16}{9}\right)^2$  — сочинение «Квадратура круга» неизвестного автора;

$\left(\frac{9}{5}\right)^2$  — Франкон из Льежа (первая половина XI в.);

$\frac{865}{275}$  — Леонардо Пизанский (Фибоначчи) (1220 г.);

$3\frac{1}{8}$  — Бувель (1503 г.), Альбрехт Дюрер (1527 г.);

$$\frac{245}{78} \text{ — Оронций Финей (1556 г.);}$$

$\frac{355}{113}$  — Адриан Антонис (1585 г.);

 $\sqrt[3]{320} - 8$  — Дюшен (1586 г.);

$$\frac{18 + \sqrt{180}}{10},$$

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdot \left\{ \frac{18 + \sqrt{180}}{10} \right\}.$$

Франсуа Виет (1593 г.):

3,1... (17 десятичных знаков) — Адриан ван Роозен  
(1593 г.);

3,1... (35 десятичных знаков) — Лудольф ван Цейлен  
(1596 г.);

3,1... ( 9 десятичных знаков) — Гюйгенс (1654 г.);

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \dots}{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \dots} \text{ — Дж. Валлис (1655 г.);}$$

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{9}{2 + \frac{25}{2 + \dots}}} \quad \text{— Броункер (после 1659 г.);}$$

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

— Лейбниц и Грегори  
(1674 г.);

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{7} + \dots - \text{Сегн (ум. в 1708 г.);}$$

3,1... (12 десятичных знаков) — де Ланьи (1717 г.);

$$\left. \begin{aligned} \frac{\pi^2}{8} &= \frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots \\ \frac{\pi^2}{32} &= \frac{1}{1^3} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \dots \end{aligned} \right\} \text{— Л. Эйлер (1734—1735);}$$

$$\frac{\pi}{4} = 4 \left( \frac{1}{5} - \frac{1}{3 \cdot 5^3} + \frac{1}{5 \cdot 5^5} - \frac{1}{7 \cdot 5^7} + \dots \right) -$$

$$- \left( \frac{1}{239} - \frac{1}{3 \cdot 239^3} + \frac{1}{5 \cdot 239^5} - \dots \right) - \text{Дж. Мэчин (1706 г.)}$$



Прервав на этом наш хронологический перечень, мы видим, что в средних веках и даже в XVI в. встречаются приближенные значения  $\pi$ , уступающие по точности приближенным значениям, которые были получены Птолемеем и Архимедом (например,  $(\frac{9}{5})^2 = 3,24$ ). Это связано с тем, что более точные значения  $\pi$  были получены «обманным путем» — с помощью геометрических построений «в уме», а не на бумаге. Кроме того, следует отличать выражения, позволяющие получать точные значения  $\pi$  (все такие выражения содержат бесконечно много операций, например выражение с радикалами, принадлежащее Виета), от осознанно или неосознанно предложенных приближений. Геометрическая квадратура Ахмеса не относится к числу наихудших: значение 3,1604 значительно лучше не только числа 3, приведенного в Библии и встречавшегося у древних вавилонян, но и многих средневековых приближений числа  $\pi$ .

Из Египта задача о квадратуре круга перешла в Грецию. Первым из греков, которые занялись поисками квадратуры круга, был философ Анаксагор. Брошенный в 434 г. до н. э. в тюрьму, он, по словам Плутарха, «в темнице нашел квадратуру круга». Греки скоро поняли, что обычными способами задачу о квадратуре круга решить невозможно. Размышляя над квадратурой круга, Гиппий из Элиды в 420 г. до н. э. впервые в истории культуры придумал кривую, отличную от окружности, «квадратрису» (рис. 3).

Современник Сократа Антифон вписал в окружность сначала квадрат (рис. 4), затем правильные восьмиугольник, шестнадцатиугольник и т. д., продолжив свои построения до тех пор, пока стороны многоугольников не начали сливаться с дугами окружности. Антифон

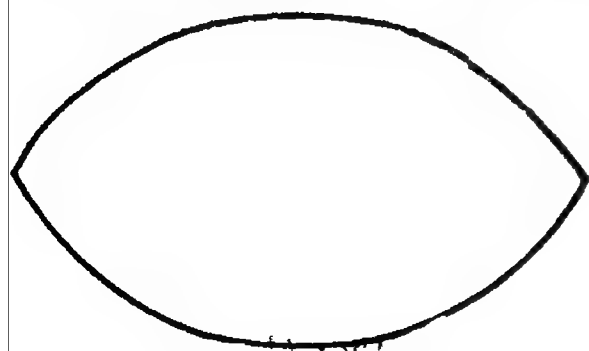


Рис. 3.

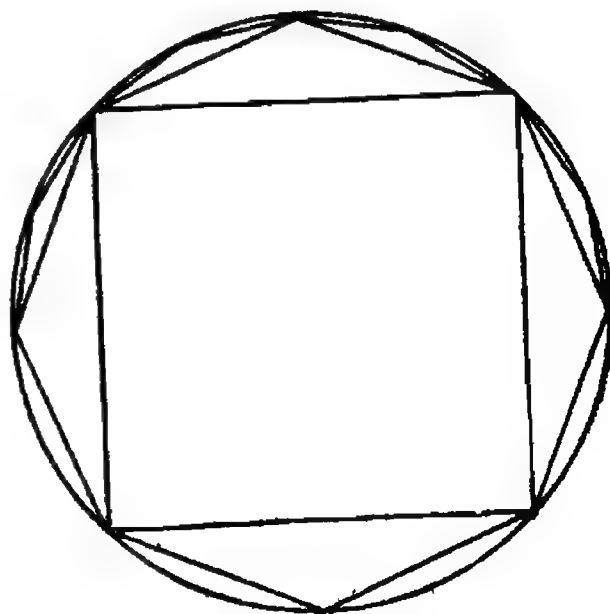


Рис. 4.

построил многоугольник с большим числом сторон, а поскольку для каждого многоугольника можно построить равновеликий ему квадрат, то Антифон заключил, что и для круга можно сделать то же самое. Сегодня мы без труда обнаруживаем ошибку в рассуждениях Антифона, но вплоть до XVII в. его метод вычисления  $\pi$  оставался единственным. Софист Брисон не удовлетворился вписанными многоугольниками и призвал на помощь еще и описанные многоугольники. Длину окружности он вполне научно заключил между периметрами вписанного и описанного многоугольников, из которых первый был меньше, а второй — больше длины окружности.

Архимед из Сиракуз в специальном сочинении «Измерение круга» строго доказал, что площадь круга равна произведению половины длины окружности и радиуса. Чтобы вычислить  $\pi$ , Архимед последовательно вписывает в окружность различные правильные многоугольники — от шестиугольника до девяностошестиугольника — и обнаруживает, что  $\pi$  заключено между  $3^{10}/70$  и  $3^{10}/71$  (эти оценки позволяют правильно определить первые две цифры после запятой в десятичном разложении  $\pi$ ). Более точное значение  $\pi$ , равное  $3^{17}/120 = 3,14166$ , удалось установить лишь создателю тригонометрии Птолемею (II в. н. э.) из Александрии.

История квадратуры круга в средние века не принесла лавров той эпохе. Одни средневековые математики вычисляли площадь круга, деля окружность на четыре равные части, проводя через точки деления касательные и принимая описанный квадрат за круг (что дает  $\pi = 4$ ), другие после безуспешных попыток повторить результаты Архимеда даже заявляли, что он допустил в своих выкладках ошибку. Приятным исключением среди всеобщего упадка был Леонардо Пизанский (XIII в.), который в своей «Геометрической практике» привел значение  $\pi = \sqrt[864]{275} = 3,1418$  (оно лучше, чем  $\sqrt{10}$ , но хуже значения  $\pi = 3,1416$ , полученного Арьябхаттой). Почти нескончаемая вереница средневековых докторов закончила свою жизнь, непоколебимо веря, что точное значение  $\pi$  равно  $3^1/7$ , и лишь гуманисты начали выражать сомнение в разрешимости квадратуры круга.

В конце XVI в. Франсуа Виет, адвокат из Пуату, опубликовал свой труд «Книга, содержащая ответы на различные математические вопросы» (1593 г.), в котором, повторив на языке чисел геометрические построения Антифона, получил правильное аналитическое выражение для  $\pi$  (оно приведено в нашем списке). Это — первое в истории математики «бесконечное произведение». Три года спустя Лудольф ван Цейлен, пользуясь старым методом удвоения числа сторон вписанного многоугольника, вычислил сначала 20, а затем — 35 знаков дробной части числа  $\pi$ . Трудолюбие ван Цейлена было вознаграждено: число сейчас иногда называют лудольфовым числом.

Двадцатипятилетний Христиан Гюйгенс (1629—1695 гг.), один из выдающихся математиков и физиков своего века, доказал изящные теоремы, позволяющие указать для длины окружности более узкие границы, чем периметр вписанного и описанного многоугольников. Уже треугольник дает Гюйгенсу верхнюю и нижнюю оценку числа  $\pi$ , найденную некогда Архимедом, а шестидесятиугольник приводит к значению  $\pi$  с тремя правильными десятичными знаками. Гюйгенс уже был убежден в невозможности геометрического решения задачи о квадратуре круга. Он же первым обратил внимание на то, что рациональность числа  $\pi$  в то время не была ни доказана, ни опровергнута.

Дальнейшие исследования квадратуры круга тесно связаны с дифференциальным и интегральным исчислением. Начало нового раздела математики было положено трудами Гюйгенса и его современников, но лишь Ньютон, Лейбниц и братья Бернулли подняли его до высоты единого метода. Дифференциальное исчисление возникло из одной задачи аналитической геометрии: о том, как провести касательную к данной кривой. И задача, и метод ее решения станут ясными лишь после того, как мы введем современное понятие *функции*. Подробно мы объясним его в V разделе, а пока приведем несколько исторических фактов.

Известный историк математики М. Кантор считает, что современные понятия и обозначения дифференциального и интегрального исчисления были впервые введены Лейбницем (1684 г.). Готфрид Вильгельм Лейбниц в то время был директором библиотеки в Ганно-

вере и придворным советником ганноверского правителя. Известен его спор с Исааком Ньютоном о приоритете в открытии нового исчисления. Ньютон (как выяснилось позднее) раньше Лейбница владел понятием «флюксии», или разности, но впервые опубликовал свое открытие лишь в 1687 г. в своих «Математических началах натуральной философии» (труде, имевшем фундаментальное значение для всей механики того времени), поэтому история избавила Лейбница от обвинений в плагиате.

До Ньютона и Лейбница построением касательных занимались знаменитые математики Ферма, Роберваль и де Слюс. Эта задача естественно приводит к аналитической геометрии Декарта. Если две величины  $x$ ,  $y$  связаны некоторым соотношением, например,  $x^2 + y^2 = 1$ , то, как учит аналитическая геометрия, выбирая на плоскости точки, координаты которых  $(x, y)$  удовлетворяют данному соотношению (в рассматриваемом случае — точки  $(1, 0)$ ,  $(-1, 0)$ , ...,  $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ , и т. д.), мы получим кривую (в нашем случае — окружность). Математики XVII в. хотели придумать общий способ, позволяющий по уравнению кривой составлять уравнение ее касательной. Метод Роберваля использовал кинематические соображения, метод Ферма был ближе к кругу идей дифференциального исчисления.

Именно в тот период математики и начали представлять  $\pi$  в виде бесконечных рядов, произведений и цепных дробей. В нашем списке первым примером таких выражений служит бесконечное произведение, предложенное Валлисом. С именем Лейбница связано представление числа  $\pi$  в виде

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Бесконечный ряд в правой части нужно понимать следующим образом. Начав суммировать его члены (поскольку их бесконечно много, то перебрать все члены и дойти до конца мы просто не в состоянии) и оборвав сумму на каком-то члене, мы из-за отбрасывания всех последующих членов совершим сколь угодно малую ошибку, стоит лишь место обрыва выбрать достаточно далеко от начала ряда. (Сколь угодно малая ошибка означает, что ее можно сделать меньше любого заранее заданного числа, например меньше  $1/1\,000\,000$ .) Например,

сумма пятисот первых членов ряда Лейбница позволяет получить значение  $\pi/4$  с ошибкой меньше  $1/1000$ , или, что то же, с точностью до трех десятичных знаков. Чтобы вычислить  $\pi$  с помощью ряда Лейбница с точностью до десяти знаков, потребовалось бы, как показал Ньютон, сложить около 5 миллиардов членов, затратив на суммирование около тысячи лет непрерывной работы. Сегодня с помощью ряда Мэчина той же точности можно достичь, затратив лишь несколько часов ручного счета. После де Ланьи только вычислители-фанатики находили  $\pi$  с точностью до нескольких сот знаков (Даз в 1884 г. нашел 200, Рихтер — 500, Шенкс — 707 знаков). Для математики их работа уже не имела никакого значения.

Первый существенный шаг вперед совершил в 1767 г. Ламберт, предприняв попытку доказать иррациональность числа  $\pi$ , в которой были убеждены математики XVIII в. Дальнейшие исследования исходили из формулы Эйлера

$$e^{2\pi i} = 1.$$

Буква  $e$  в этой формуле означает сумму ряда

$$1 + \frac{1}{1 \cdot 1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$$

$$\dots = 2,718281828459045 \dots$$

— неперово число, названное так в честь изобретателя логарифмов барона Непера (1614 г.). Число  $i$  означает  $\sqrt{-1}$ . В отличие от действительных чисел эту величину (следуя Декарту) называют «мнимой».

Формула Эйлера, устанавливая связь между числами  $\pi$  и  $e$ , позволила в 1882 г. профессору Линдемману из Мюнхена доказать трансцендентность числа  $\pi$ . В своей работе Линдемман использовал результат Ш. Эрмита, установившего в 1873 г. трансцендентность числа  $e$ . Так, в конце прошлого века была отрицательно решена задача о квадратуре круга.

Другой не менее знаменитой задачей в истории математики была задача о решении уравнений различных порядков.

Мы уже говорили о том, что решения уравнений первого порядка с одним неизвестным приводились в древнейшем математическом памятнике — папирусе Ахмеса.

Диофант во второй половине IV в. до н. э. уже решал уравнения второго порядка. Общий рецепт решения таких уравнений (без использования привычных нам буквенных обозначений) разработал между 800 и 825 гг. Мухаммед ибн Муса. Это была еще словесная алгебра, оперирующая громоздкими словесными описаниями величин и производимых над ними действий. Уравнение третьего порядка в присутствии императора Фридриха II предложил (в 1224 г.?) решить Леонардо Пизанскому, прозванному Фибоначчи, придворный философ Иоанн из Палермо. Итальянские математики XVI в. Сципионе дель Ферро, Иеронимо Кардан и Луиджи Феррари нашли общий метод решения уравнений третьего и четвертого порядка, а спор о приоритете между Карданом и Тартальей принадлежит к числу наиболее громких скандалов в истории математики.

Но лишь великое изобретение Виета, выпустившего в 1591 г. «Введение в аналитическое искусство», в котором он вместо чисел пользовался *буквами*, и тем самым положившего начало современной алгебре, позволило сформулировать задачи теории уравнений. Общее решение уравнения второго порядка

$$x^2 + ax = b$$

можно записать в виде

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b} \quad (A)$$

Уравнение третьего порядка

$$x^3 + ax = b$$

имеет решение

$$x = \sqrt[3]{\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{a}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}, \quad (B)$$

а для того, чтобы решить уравнение четвертого порядка

$$x^4 + ax^2 + c = bx,$$

предварительно необходимо найти  $t$  из уравнения третьего порядка

$$t^3 + \left(3\sqrt{c} - \frac{a}{2}\right)t^2 + (2c - a\sqrt{c})t = \frac{b^2}{8} \quad (B')$$



(подстановка  $t = u - (\sqrt{c} - a)$  позволяет избавиться от члена, содержащего  $t^2$ ), а затем  $x$  из уравнения

$$(x^2 + \sqrt{c} + t)^2 = (2\sqrt{c} - a + 2t)x^2 + bx + (t^2 + 2t\sqrt{c}),$$

извлекая квадратный корень из правой и левой частей [извлечение квадратного корня из правой части возможно, если  $t$  удовлетворяет уравнению (В)]. В результате мы получим для  $x$  довольно сложное выражение, но по своей структуре оно будет походить на формулы (А) и (Б). Так же как (А) и (Б), оно будет состоять из конечного числа операций сложения и извлечения корней, производимых над коэффициентами  $a, b, c$  исходного уравнения и взятых с различными численными множителями. Когда Чирнгаузен сообщил Лейбницу, что найденный им метод позволяет решать и уравнения пятого порядка, Лейбниц в ответном письме выразил сомнение в том, чтобы метод Чирнгаузена позволял решать уравнения выше четвертого порядка. Через 150 лет молодой норвежский математик Нильс Генрик Абель доказал невозможность решения произвольных уравнений пятого и более высокого порядка с помощью конечного числа четырех арифметических действий и операций извлечения корня, производимых над коэффициентами уравнения.

Доказательство Абеля было основано на новом математическом понятии — понятии *группы*. Предположим, что у нас имеется множество каких-то предметов  $a, b, c, \dots, f, g$ , на котором определены некоторые операции  $S, T, V, \dots, Z$ . Операция  $S$  заменяет  $a$  на  $f$ ,  $b$  — на  $c$ ,  $\dots$ ,  $g$  — на  $d$ . Операция  $T$  производит какую-то другую перестановку элементов множества,  $V$  — третью и т. д. Если операции  $S, T, V, \dots, Z$  обладают тем свойством, что, выполнив одну за другой любые две из них (например,  $S$  и  $V$  или  $T$  и  $V$ ), мы получим ту же перестановку предметов, которую производит какая-то одна из операций, определенных на нашем множестве, то операции  $S, T, V, \dots, Z$  образуют *группу*.

Возьмем, например, куб и обозначим его грани  $a, b, c, d, e, f$ . В качестве операций  $S, T, V, \dots$  выберем повороты на  $0, 90, 180$  и  $270^\circ$  вокруг осей, соединяющих центры параллельных граней, и на  $120$  и  $240^\circ$  — вокруг больших диагоналей куба. При каждом таком повороте



грани куба «меняются ролями». Взяв модель куба, не трудно убедиться в том, что какие бы два поворота мы ни совершили один за другим, результат всегда будет таким же, как если бы мы выполнили лишь один соответствующим образом выбранный поворот. Следовательно, множество граней куба с определенными на нем операциями — поворотами — образует группу.

Возникает вопрос: как изучение групп связано с решением уравнений? Рассмотрим, например, уравнение второго порядка

$$x^2 + ax = b \left( x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b} \right).$$

Пусть  $x_1$  и  $x_2$  — его корни. Выбирая перед выражением  $\pm \sqrt{a^2/4 + b}$  знак плюс, мы получаем  $x_1$ , выбирая знак минус,  $x_2$ . (Аналогично обстоит дело и с уравнениями более высокого порядка.) Следовательно, перемена знака служит в данном случае той операцией, которая переставляет корни уравнения  $x_1$  и  $x_2$  так же, как повороты куба переставляли его грани. При изучении перестановок пяти величин  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  довольно быстро выясняется, что изменение знаков различных радикалов *не приводит* к нужным перестановкам корней. Знаменитый математик Феликс Клейн открыл и исследовал подобие между группой перестановок корней уравнения пятого порядка и группой поворотов икосаэдра (правильного двенадцатигранника). Разумеется, решение уравнений составляет лишь один из многочисленных разделов алгебры, которая в свою очередь является лишь одним из многих разделов математики.

*Теория вероятностей* возникла из задач, которые ставили перед математиками любители азартных игр. Ее создатели Ферма, Паскаль, Гюйгенс и Бернулли занимались вопросом о том, как следует разделить сделанные игроками ставки, если игра по той или иной причине не закончена и если игрок  $A$  набрал  $m$ , а игрок  $B$  —  $n$  очков. Предположим, например, что два шахматиста одинаковой силы играют на приз в 100 франков, который получает тот, кто первым наберет 3 очка. (Партии, закончившиеся вничью, при подсчете очков во внимание не принимаются.) Когда  $A$  набрал 2 очка, а  $B$  — 1 очко, между участниками турнира возникло недоразумение, и дальнейшие встречи не состоялись.

Как следует разделить между ними 100 франков? Очевидно, в том же отношении, в каком находятся набранные шахматистами очки. Такого мнения придерживался еще Лука Пачиоли (1494 г.). Поскольку  $A$  набрал 2 очка, а  $B$  — одно очко, то  $A$  должен получить 66,66 франка, а  $B$  — 33,33 франка. Кардан (1501—1576) возразил, обратив внимание на то, что метод Пачиоли не учитывает число очков, которое должен набрать победитель (в нашем случае 3 очка), но сам дал неправильное решение. Тарталья (1556 г.) считал, что не существует правила, которое позволило бы справедливо разделить приз между двумя игроками, и лишь Ферма (около 1654 г.) рассуждал следующим образом. Обозначим игры  $a, b$  (в зависимости от того, кто из игроков,  $A$  или  $B$ , выигрывает). Заранее можно сказать, что две следующие игры (отмененные из-за возникших разногласий) должны выявить победителя. Возможен лишь один из четырех исходов этих двух игр:

$aa, ab, ba, bb$ .

Лишь в одном из них ( $bb$ ) игрок  $B$  набирает 3 очка раньше, чем игрок  $A$ . Следовательно, у игрока  $B$  на выигрыш имеется один шанс из трех, и игрок  $A$  должен получить 75 франков, а игрок  $B$  — 25 франков. Блез Паскаль работал над задачей о разделе ставки одновременно с Ферма. Эту задачу поставил Паскалю игрок де Мере, но современники не могли понять и по достоинству оценить метод Паскаля. Однако именно метод Паскаля положили в основу своих работ Хр. Гюйгенс (1724 г.) и И. Бернулли (1713 г.). Их работы по праву считаются первыми научными работами по теории вероятностей.

А. Муавр (1710 г.) предположил, что силы игроков  $A$  и  $B$  неравны и что они относятся между собой, как  $p:q$ . Эту задачу также удалось решить методом Паскаля, то есть методом полной математической индукции, о котором пойдет речь в IV разделе.

В последней четверти XIX в. гениальный математик Георг Кантор из Галле один создал новый раздел математики — теорию множеств. Она не только проникла во все другие математические дисциплины, но и была признана краеугольным камнем всей математики; связующим звеном между логикой и математикой. Многие

и сейчас усматривают в теории множеств универсальную, не сводимую к более простой и, следовательно, охватывающую классическую логику, схему всякой дедуктивной теории.

Теория множеств — это наука о множествах самой произвольной природы. *Множество* — это то же, что совокупность, набор, класс, состоящий из отдельных элементов. Множество считается определенным, если мы располагаем (хотя бы теоретически) способом распознавать, является ли любой указанный нам предмет элементом нашего множества или нет. Например, множество натуральных чисел, множество всех прямых на плоскости или в пространстве или множество вороных коней определены однозначно. (Однозначно определено и пустое множество, не содержащее ни одного элемента.) Помимо отношения принадлежности (элемент  $a$  принадлежит множеству  $A$ ), важную роль играет отношение соответствия.

Предположим, что между двумя множествами можно установить так называемое *взаимно однозначное соответствие*, то есть сделать так, чтобы каждому элементу одного множества соответствовал один и только один элемент другого множества и каждому элементу другого множества соответствовал один и только один элемент первого множества. В этом случае говорят, что оба множества имеют одинаковую мощность (равномощны). Взаимно однозначное соответствие можно представить себе как набор ниток, связывающих в пары по одному элементу одного и по одному элементу другого множества. Например, между множеством трех коней и множеством трех всадников можно установить взаимно однозначное соответствие, но его нельзя установить между множеством трех коней и множеством четырех людей.

Мы видим, что все множества, состоящие из трех элементов, имеют одинаковую мощность, которую символически даже можно обозначить «3» (тройка в данном случае выступает в роли не обычного, а так называемого *кардинального* числа, характеризующего мощность множества). Множество всех четных натуральных чисел и множество всех натуральных чисел имеют одинаковую мощность, что нетрудно понять, поставив в соответствие каждому натуральному числу  $n$  четное число  $2n$ . Еще

Кантор доказал, что множество всех точек отрезка  $A$  имеет такую же мощность, как и множество любого другого (в том числе и более длинного) отрезка  $B$ . Идея доказательства ясна из рис. 5, где штриховыми линиями показаны «нити» соответствия. Мы видим, что часть не обязательно меньше целого: множество точек отрезка  $A$ , составляющего лишь часть отрезка  $B$ , имеет

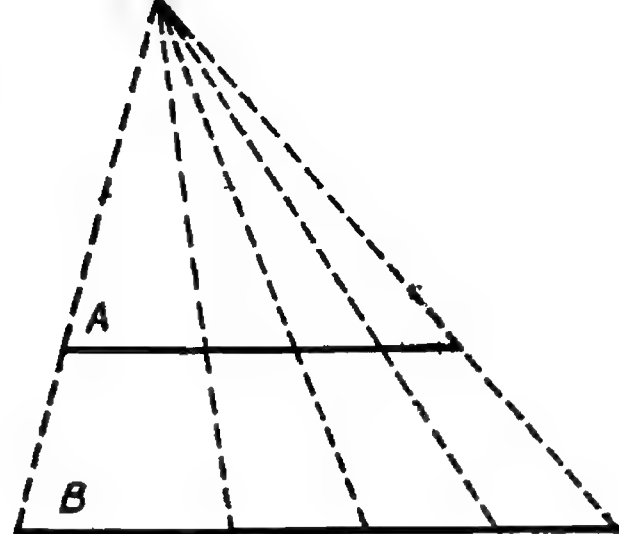


Рис. 5.

тем не менее одинаковую с ним мощность. Ясно, что такое возможно лишь в множествах, содержащих бесконечно много элементов, — бесконечных множествах. Кантор доказал также, что мощность множества, состоящего из всех точек отрезка, не равна мощности множества натуральных чисел. Поскольку множества той же мощности, что и множество натуральных чисел, называются *счетными*, то Кантор доказал, что множество точек отрезка несчетное. Мощность этого множества получила специальное название «мощности континуума».

Первой необычайно трудной задачей, с которой столкнулась теория множеств, была проблема трихотомии.

Мощность множества, как мы видели, есть не что иное, как обобщение кардинального числа. Если у нас имеются два натуральных числа, то они всегда либо равны, либо одно из них больше другого. Можно ли то же самое сказать о мощности множеств? Следуя определению, предложенному Кантором, мы скажем, что мощность множества  $A$  больше мощности множества  $B$ , если  $A$  содержит подмножество (то есть часть всего множества)  $A'$ , равномощное множеству  $B$ , и в то же время  $B$  не содержит ни одного подмножества  $B'$ , равномощного множеству  $A$ . При таком определении заранее не ясно, всегда ли одно из множеств неравной мощности будет обладать большей мощностью, чем другое. Может оказаться, что и в  $A$  есть подмножество мощности, равной мощности множества  $B$  и в  $B$  есть

подмножество, мощность которого равна мощности множества  $A$ . В этом случае мы могли бы воспользоваться теоремой, доказанной Ф. Бернштейном на семинаре Кантора, о том, что мощности обоих множеств равны. Но как быть, если в  $A$  нет подмножества мощности, равной мощности множества  $B$ , а в  $B$  нет подмножества мощности, равной мощности множества  $A$ ? Эта проблема долго оставалась нерешенной — до тех пор, пока Э. Цермело не доказал свою знаменитую теорему о том, что «любое множество можно поставить во взаимно однозначное соответствие с вполне упорядоченным множеством», из которой уже совсем нетрудно вывести трихотомию.

*Упорядочение* множества означает, что каждый его элемент ставится на определенную ступень иерархической лестницы, ему как бы присваивают «ранг», при этом один из двух элементов множества всегда должен быть «младше», а другой «старше» и элемент, который старше «старшего» (как и в служебной иерархии), должен быть старше «младшего». Множество называется *вполне упорядоченным*, если в каждом его подмножестве существует «самый младший» элемент. Поясним это определение на примере.

Возьмем континуум, то есть какой-нибудь отрезок, например отрезок  $[0, 1]$ . Упорядочить множество его точек нетрудно. Будем считать ту из двух точек, которая лежит правее, старшей, а ту, которая лежит левее, — младшей. Однако при таком упорядочении наш отрезок нельзя считать *вполне* упорядоченным множеством. Действительно, рассмотрим подмножество  $C$ , которое получится, если мы выколем из нашего отрезка его левый конец. В подмножестве  $C$  уже не будет самой младшей точки. Зато множество натуральных чисел, упорядоченное так, что старшим считается то из двух чисел, которое больше, — вполне упорядоченное. Действительно, если мы вычеркнем из множества всех натуральных чисел, например, числа 1, 2, 3, 4, 5, то в оставшемся подмножестве 6 будет самым младшим элементом.

Мы видим, сколь неожиданной была теорема Цермело о том, что «любое множество можно поставить во взаимно однозначное соответствие с вполне упорядоченным множеством». В математическом мире она вызвала не меньшую сенсацию, чем теория Эйнштейна у физиков.

ков, с той лишь разницей, что теорема Цермело столкнулась с весьма сильной оппозицией. Французские математики Пуанкаре, Лебег, Борель не признали ее на том основании, что Цермело при доказательстве своей теоремы использовал специальную аксиому, им же самим введенную в теорию множеств и названную поэтому *аксиомой выбора Цермело*. Аксиома выбора формулируется так: «Если  $\Omega$  — любое семейство непустых попарно не пересекающихся множеств  $A, B, C, \dots$ , то существует множество  $\Gamma$ , содержащее по одному и только по одному элементу из  $A, B, C, \dots$ » Французские математики усомнились в законности введения этой аксиомы. Они обратили внимание на то, что при построении множества  $\Gamma$  в некоторых случаях необходимо производить выбор, то есть решать, какой из элементов множества  $A, B, C, \dots$  следует включить в  $\Gamma$ . Если  $\Omega$  содержит бесконечно много множеств и в этих множествах ни один элемент не выделен, то для составления  $\Gamma$  необходимо произвести *бесконечно много* актов выбора.

Автор этой книги придерживается иного мнения. Аксиома выбора Цермело не имеет ничего общего с построением множества  $\Gamma$ . Если мы могли построить множество  $\Gamma$ , то никакой аксиомы нам бы не потребовалось. Это утверждение само по себе следует считать «аксиомой существования» — такой же, как и многочисленные другие аксиомы теории множеств, а ее очевидность ничуть не меньше очевидности столь милой сердцу противников Цермело аксиомы индукции. Аксиома Цермело ни разу еще не приводила к противоречию, и (как показал Серпинский) даже те, кто не приемлет аксиомы Цермело, нередко, сами того не ведая, пользуются ею.

Позицию противников Цермело можно было бы считать обоснованной, если бы удалось полностью (то есть так, чтобы в нее входили и фундаментальные открытия Бореля и Лебега\*) построить систему математики, обходящуюся без аксиомы Цермело. Создание такой системы — задача необычайно трудная, поскольку (если не считать «Оснований математики» Расселла и Уайтхеда) даже арифметику не удастся формализовать

---

\* Открытия французских математиков относятся к так называемой теории меры. Мера в теории множеств — это обобщение понятий длины и площади.



столь полно, чтобы можно было судить, какие аксиомы в ней использованы, а какие «оставлены без внимания». Аксиому Цермело следовало бы считать великим и полезным научным открытием, даже если бы нам удалось, не прибегая к ней, построить всеобъемлющую систему математики, ибо поиск новых «очевидных» аксиом всегда останется одним из главнейших побудительных мотивов в развитии математики.

Уже упоминавшийся четырехтомный труд Расселла и Уайтхеда «Основания математики» (так и оставшийся неоконченным) — наиболее яркий пример последовательного развития древа математики от корней до его густой кроны. Расселл и Уайтхед предприняли героическую попытку построить грандиозную систему математики от аксиом логики и теории множеств до арифметики, геометрии и элементарной механики. В своем труде они используют в основном символический метод, то есть выражают специальными значками не только числа и математические отношения, но и такие логические термины, как «все», «каждый», «ни один», «и», «либо, либо», «из  $P$  следует  $Q$ » и т. д.

Труд Расселла и Уайтхеда, пожалуй, можно было бы упрекнуть в чрезмерной сложности, отпугивающей читателя, если бы его авторы, помимо уже названной цели — прослеживания развития математики от исходных аксиом до довольно сложных теорем, — не преследовали еще одну цель: не стремились избавить математику от парадоксов, известных еще в древности, но с удвоенной силой проявившихся в современной теории множеств. Из таких парадоксов назовем, например, парадокс лжеца или парадокс Расселла, который формулируется следующим образом. Пусть  $K$  — класс таких и только таких множеств  $Z$ , которые не являются своими собственными элементами. (Такие множества существуют. Например, множество, состоящее из трех яблок, не содержит самое себя в качестве своего элемента.) Возникает вопрос: является ли множество  $K$  своим собственным элементом или нет? Если бы множество  $K$  содержало себя в качестве элемента, то оно было бы множеством  $Z$ , а множества  $Z$  — это, по определению, такие множества, которые являются элементами самих себя. В то же время если бы  $K$  не содержало себя в качестве одного из своих элементов, то оно было бы



множеством  $Z$  и, следовательно, должно было бы содержать себя. Таким образом, какое бы допущение мы ни приняли — и о том, что  $K$  является элементом самого себя, и о том, что  $K$  не входит в состав самого себя, — оно приводит к противоречию. Чтобы исключить подобные софизмы, Расселл предложил так называемую *теорию логических типов*. Эта теория действительно позволила избавиться от парадоксов, но очень усложнила основания математики: такие выражения, как «каждый», «все числа» и т. д., у Расселла неоднозначны. Однако, насколько можно судить, такого рода усложнения неизбежны.

Говоря о заслугах Г. Кантора, нельзя не упомянуть о том, что именно он ввел *ординальные* числа. Так же как *кардинальные* числа (мощности) характеризуют «населенность» множества элементами, ординальные числа позволяют судить о порядковом типе вполне упорядоченного множества. Например, упорядоченному произвольным способом множеству чисел  $1, 2, 3, \dots, n$  соответствует ординальное число  $n$ , множеству всех натуральных чисел  $1, 2, 3, 4, \dots$ , упорядоченных по величине, — ординальное число  $\omega$ , пополненному множеству всех натуральных чисел  $1, 2, 3, 4, \dots, o$  — ординальное число  $\omega + 1$ . В последнем множестве в отличие от множества натуральных чисел, где нет наибольшего числа, имеется «самый старший» элемент  $o$ .

Г. Кантору принадлежит постановка еще одной сложной проблемы теории множеств. Как известно, мощность континуума (отрезка) больше мощности множества натуральных чисел. Возникает вопрос: существует ли множество промежуточной мощности, которая меньше мощности континуума, но больше мощности множества натуральных чисел? Проблема эта, относящаяся к столь простым (лишь на первый взгляд) и фундаментальным понятиям, долгое время не поддавалась решению\*.

---

\* Эту проблему Г. Кантора (известную под названием *континуум-гипотезы*) решил в 1963—1964 гг. американский математик Пол Дж. Козн. Он доказал, что континуум-гипотеза (и аксиома выбора Цермело) не зависит от остальных аксиом теории множеств. Иначе говоря, и сама аксиома, и ее отрицание не противоречат остальным аксиомам теории множеств. На Международном конгрессе математиков, состоявшемся в 1966 г. в Москве, Пол Дж. Козн был удостоен медали Филдса. Русский перевод работ П. Дж. Козна

Геометрия также не стояла на месте и со времен Евклида ушла далеко вперед. Вспомним аналитическую геометрию Декарта, о которой мы уже говорили. Она позволила применить к геометрии методы алгебры (алгебраическая геометрия) и дифференциального исчисления (дифференциальная геометрия). Из многочисленных «вторжений» в геометрию теории множеств упомянем лишь о выдающемся открытии — создании в XIX в. неевклидовой геометрии. Честь открытия неевклидовой геометрии принадлежит русскому математику Лобачевскому, немецкому математику Гауссу и венгерскому математику Бойяи.

Знаменитый XI постулат из «Элементов» Евклида утверждает, что через точку, лежащую вне прямой, можно провести одну и только одну прямую, параллельную данной прямой. При этом параллельные прямые в «Элементах» определялись как прямые, не имеющие общих точек (непересекающиеся). Тысячи математиков пытались трактовать XI постулат как теорему и доказывать ее, исходя из остальных аксиом геометрии Евклида, но все «доказательства» неизменно оказывались ошибочными. Лишь Гаусс, Лобачевский и Бойяи избрали другой путь, решив доказать, что XI постулат Евклида не зависит от остальных аксиом, изложенных в «Элементах», и что, отказавшись от него (заменив его отрицанием), мы получим иную, непротиворечивую геометрию — так называемую неевклидову геометрию.

Чтобы лучше разобраться в основной идее создателей неевклидовой геометрии, воспользуемся методом «словаря», предложенным Пуанкаре. Представим себе, что какой-то человек понимает некоторые термины геометрии иначе, чем люди, воспитанные на «Элементах» Евклида, но, слыша слово «точка», вкладывает в него тот же смысл, что и последователь Евклида. При слове «прямая» в воображении нашего оригинала возникает представление о том, что «евклидовец» назвал бы полукругностью, ортогональной данной прямой  $\alpha$  (то есть пересекающей прямую  $\alpha$  под прямым углом). Пусть все

---

см. в сб. «Математика», 8, № 5 (1965) Русский перевод лекций П. Дж. Коэна «Теория множеств и континуум-гипотеза», прочитанных весной 1965 г. в Гарвардском университете, вышел в 1969 г. в издательстве «Мир». — Прим. перев.

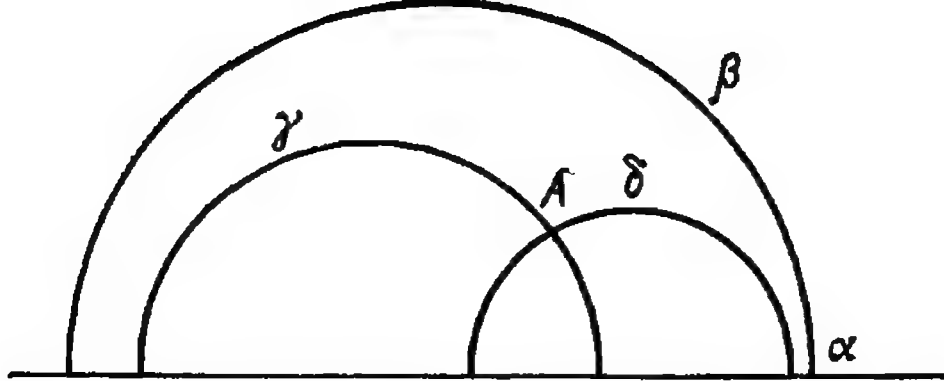


Рис. 6.

остальные термины наш «неевклидовец» понимает так же, как и последователи Евклида, но выражение *вся плоскость* пусть означает для него лишь то, что евклидовец назвал бы *верхней полуплоскостью, расположенной над прямой  $\alpha$* . Неевклидовец легко договорится с евклидовцем о смысле всех аксиом геометрии, кроме XI постулата, и поверит в их правильность. Разногласия между евклидовцем и неевклидовцем возникнут лишь по поводу XI постулата. Неевклидовец не только не поверит в правильность этого постулата, но и, упорствуя в своем «неверии», начертит (рис. 6) две различные «прямые»  $\gamma$  и  $\delta$ , параллельные одной и той же «прямой»  $\beta$  и проходящие через точку  $A$ . Если евклидовец возразит, что фигуры неевклидовца начерчены неправильно, и нарисует другие, то неевклидовец ответит ему тем же. Если же евклидовец захочет логически, без помощи чертежей вывести XI постулат из остальных аксиом, то неевклидовец довольно легко (при помощи своих фигур) обнаружит в его рассуждениях ошибку, ибо будь XI постулат логическим следствием остальных аксиом геометрии, он должен был бы выполняться и для искривленных неевклидовых «прямых», для которых справедливы все эти аксиомы.

Мы видим, что в математике постулат или аксиома не имеют того значения, какое им приписывают в обычной речи. И постулат, и аксиома — истины, отнюдь не очевидные. Эти истины истинны лишь в той мере, в какой удастся доказать следующие из них теоремы. Если бы постулат параллельных был доказан (то есть следовал из других постулатов или аксиом), то его нельзя было бы отбросить. Отбрасывать и вводить можно только аксиомы и постулаты, но отнюдь не теоремы.

Хотя основные исследования неевклидовой геометрии, проведенные Клейном, Кэли и Гильбертом, ныне давно уже закончены и результаты их широко известны в математическом мире, в нематематических кругах о неевклидовой геометрии все еще можно слышать совершенно превратные мнения. С одним из таких ошибочных утверждений, а именно с утверждением о том, что якобы в неевклидовой геометрии параллельные определяются иначе, чем в евклидовой, мне даже приходилось встречаться в книгах. Это утверждение неверно, поскольку обе геометрии — и евклидова, и неевклидова — определяют параллельные как прямые, не имеющие в конечной части плоскости точек пересечения (следует добавить, что при строгом изложении обеих геометрий вообще отпадает необходимость говорить о бесконечно удаленных точках). Нередко можно слышать и другое ошибочное утверждение о том, что якобы интуиция решила выбор в пользу евклидовой геометрии. Формулируют его обычно так: «Каждому ясно, что через точку, лежащую вне прямой, можно провести лишь одну прямую, параллельную данной, если только прямая не искривлена. Но если прямая искривлена, то какая же это прямая?» Это утверждение также неверно, ибо достаточно представить себе точку, расположенную на очень большом расстоянии от данной прямой, и две почти сливающиеся параллельные, которые проходят через эту точку, как наша пространственная интуиция умолкнет и не сможет ничего нам подсказать. Если и в наше время находятся люди, «не приемлющие» неевклидову геометрию, то стоит ли удивляться осторожности Гаусса, который в 1829 г. писал, что вряд ли опубликует при жизни результат своих исследований по неевклидовой геометрии, ибо опасается «криков божийцев».

Физики обнаружили, что неевклидова геометрия имеет самое непосредственное отношение к теории относительности, однако этот вопрос выходит за границы обсуждаемых нами проблем, и мы отсылаем читателя к популярной брошюре А. Эйнштейна «Геометрия и опыт» \*.

---

\* Русский перевод см. в издании: А. Эйнштейн, Собрание научных трудов, 2, стр. 83—94. М., изд-во «Наука», 1966. — *Прим. перев.*

К области геометрии относится еще один часто задаваемый вопрос: что такое четырехмерное пространство?

Необходимость во введении четырехмерного пространства возникает следующим образом. Между формулами аналитической геометрии на плоскости и в пространстве имеется полная аналогия. Например, уравнение окружности имеет вид

$$x^2 + y^2 = 1,$$

а уравнение сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Если мы захотим продолжить эту аналогию и напишем уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 1,$$

то нам не удастся построить из бумаги или гипса модель объекта, который удовлетворяет уравнению, но ничто не мешает нам назвать это уравнение *уравнением четырехмерной сферы*. Такое название не только указывает, что в уравнение входят четыре неизвестных, но и говорит о структуре уравнения (уравнение *сферы* означает, что наше четырехмерное уравнение устроено аналогично уравнению трехмерной сферы). Разумеется, от одного лишь названия, даже отражающего структуру уравнения, пользы было бы мало, если бы понятие четырехмерной сферы не приносило других выгод: основные геометрические свойства трехмерной сферы переносятся (с соответствующими изменениями и при надлежащем истолковании) на четырехмерную сферу. Например, двумерная плоскость пересекается с трехмерной сферой по окружности. Аналогично трехмерная гиперплоскость (то есть трехмерная «плоскость» в четырехмерном пространстве) пересекается с четырехмерной сферой по трехмерной окружности.

Ясно, что, говоря о «трехмерной гиперплоскости», «пересечении гиперплоскости с четырехмерной сферой» и т. д., необходимо представлять себе не привычные нам наглядные геометрические образы, а соответствующие уравнения и их решения — так же как мы рекомендовали поступать в разделе I, говоря о двойкой интерпретации аналитической геометрии. Тогда геометрия

четырёхмерного пространства становится удобным средством формулировки и доказательства различных утверждений относительно уравнений с четырьмя неизвестными.

Применение математики к физике — дело не новое. Даже не возвращаясь к Архимеду и его сочинениям «О равновесии плоских фигур и центрах тяжести» и «О погруженных в воду и плавающих телах»\*, достаточно поверхностного знакомства с историей астрономии, механики и физики начиная с XVI в., чтобы понять, к каким глубоким изменениям в этих науках привело развитие математики.

В механике математические формулировки законов Галилея, Кеплера, Ньютона и Даламбера постепенно уступили место строгой дедуктивной теории, названной Лагранжем (1736—1812) аналитической механикой. Пользуясь методами новой науки, гений Гаусса и Лапласа сумел извлечь из гипотез Ньютона далеко идущие следствия, относящиеся к так называемой небесной механике, то есть части механики, занимающейся изучением фигур небесных тел и их движений. Небесная механика не только учит вычислять массы светил по движению спутников, не только показывает, как по движению Луны оценить степень сжатия Земли вдоль направления ее оси, и не только предсказывает время появления комет. Пользуясь методами небесной механики, Леверрье в 1845—1846 гг. по возмущениям в движении Урана (то есть по отклонениям наблюдаемых положений Урана от предсказываемых) сумел «на кончике пера» открыть существование новой планеты (Нептуна), лишь позднее обнаруженной в указанном участке неба при наблюдении в телескоп.

Исследуя колебания маятника, Гюйгенс (1656 г) сконструировал маятниковые часы и заложил основы научного измерения времени, не связанного с наблюдением небесных светил. В руках геодезистов тот же маятник стал ценным прибором, позволяющим изучать силу

---

\* Именно во втором сочинении сформулирован знаменитый закон Архимеда, с помощью которого, как гласит легенда, великий ученый определил, сколько золота и серебра израсходовал ювелир правителя Сиракуз Герона на изготовление короны для своего повелителя. Русский перевод сочинений Архимеда см. в книге. Архимед, Сочинения, М., Физматгиз, 1962



земного притяжения. Французские ученые во времена Великой революции произвели с помощью маятника измерения силы тяжести в Перу и в Лапландии. Результаты их измерений показали, что предсказания математика Клеро, который теоретически рассчитал фигуру Земли, согласуются с действительностью. Другой ученый, математик и физик Фуко, с помощью маятника доказал суточное вращение Земли. Мы могли бы привести сотни других примеров. При создании волновой теории света теоретическая (математическая) мысль также опередила эксперимент и подсказала, как следует провести опыт, чтобы эффект, открытый на бумаге, стал доступным наблюдению.

Во второй половине XIX в. умами всех ученых безраздельно завладела электромагнитная теория. Основы ее заложили своими трудами физик Фарадей и математик Ампер, но стремительное развитие теории началось лишь после того, как великий английский ученый Дж. К. Максвелл (1831—1879) вывел свою знаменитую систему дифференциальных уравнений, охватывающих все богатство и разнообразие электромагнитных процессов. Исходя из уравнений Максвелла, Герц теоретически пришел к заключению о существовании электромагнитных волн, использованных впоследствии в радиотехнике. Немало примеров того, к каким выдающимся результатам приводит математический метод в прикладных науках, можно было бы привести из области гидродинамики и столь важной для инженеров теории упругости. А. Эйнштейн теоретически вычислил движение перигелия Меркурия, то есть медленное вращение эллипса, по которому движется эта планета.

Итак, что же такое прикладная математика? К *прикладной математике* принято относить разделы математики, которые находят применение там, где математика играет в теории более важную роль, чем опыт и наблюдения, но все же роль эта недостаточна, чтобы их можно было назвать чисто математическими.

В настоящее время математика становится столь важным и неперемнным средством научных исследований в астрономии, физике и химии, в медицине и экспериментальной психологии, в биологических и общественных науках, в целом ряде прикладных отраслей знания, например, в геодезии, судоходстве, строительстве,



электротехнике, машиностроении, статистике и теории страхования, что приносимая ею польза слишком очевидна, чтобы ее было необходимо как-то обосновывать.

Во всех общеобразовательных средних школах всего цивилизованного мира математика считается обязательным предметом. Ее изучают в профессионально-технических и торговых училищах. Высшую математику преподают в инженерных и политехнических институтах, университетах, в высших сельскохозяйственных и военных учебных заведениях.

В Академиях наук и научных обществах математика обычно имеет своих особых представителей. В средних школах математика и физика нередко бывают представлены в лице одного учителя, ведущего оба предмета. В академиях положение иное: там даже различные отделы математики имеют своих особых представителей.

Чтобы помочь читателю составить представление о темпе роста числа математических журналов, упомянем, что в XVII в. существовало лишь одно периодическое издание — основанный Дени де Сайо, месье де ля Кудре «Журнал учёных» — *Journal des Sçavants*. В 20-х годах нашего века общее число математических журналов оценивалось примерно в 600. В наши дни одни лишь названия специальных периодических изданий по математике могли бы заполнить толстенный том.

Особую группу составляют книги, монографии и учебники. Число книжных изданий столь значительно, что некоторые крупные издательства и издательские фирмы специализируются на выпуске исключительно математической литературы.

Разумеется, судить о степени важности той или иной науки по количеству израсходованной бумаги — способ довольно поверхностный, но он тоже может служить достаточно убедительным аргументом, тем более что в математике даже необычайно важные работы иной раз уместаются всего лишь на нескольких страницах.

„Но именно элементарными методами, столь необходимыми практику, во многих высших технических учебных заведениях пренебрегают. Там все преподносится ему на высоконаучной основе, там его учат так, что позднее он оказывается не в состоянии применить полученные познания на практике.

Хольцмюллер

### III. ПРАКТИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

*Коммерческая арифметика. — Теория вероятностей. — Геометрия на практике. — Инженерное дело. — Статистика.*

С практическими приложениями математики — *коммерческой арифметикой* — мы встречаемся еще в X в. *Бухгалтерия* в собственном смысле этого слова означает прикладную арифметику, занимающуюся изучением лишь двух действий: сложения и вычитания. Коммерческая арифметика не исчерпывается одной лишь бухгалтерией. К ней следует отнести также вычисление простых и сложных процентов, ренты, пропорции и теоретические основы страхования. Сейчас нас будут интересовать не способы, которыми производятся вычисления (их изучают в средней школе). Мы хотим поразмыслить над тем, каким образом абстрактную науку о числах можно использовать для удовлетворения практических потребностей коммерции. Прежде всего возникает вопрос: как с помощью числа выразить стоимость какой-нибудь вещи? Размышляя над ним, мы приходим к задаче о том, как с помощью числа выразить стоимость денежной суммы. Ответ известен: стоимость бумажных денег определяется числом, напечатанным на бумажном банкноте, и по закону приравнивается к стоимости определенной массы золота. Вопрос же о том, как численно выразить массу тел, давно решен элементарной физикой. Таким образом, выразить числом стоимость предмета можно и теоретически, и практически.

Возникает вопрос и о том, можно ли применять в коммерческих расчетах некоторые фундаментальные утверждения, например, можно ли при сравнении счетов соотносить размеры взаимных претензий с массами золота, обеспечивающими сделку. Возможность такой проверки правильности расчетов *не является* математической теоремой, а основана на практической гипотезе о том, что стоимость массы золота для владельца не изменится, если золото от него сначала перейдет в чужие руки, а потом снова вернется к нему. На аналогичных гипотезах основана возможность использования отрицательных чисел при подсчете долгов.

Можно задать и более «фундаментальный» вопрос: нужна ли вообще коммерческая арифметика? Ведь каждый без труда может привести примеры людей, весьма успешно отстаивающих свои финансовые интересы и совершенно невежественных в математике. На этот вопрос следует ответить, что таким людям обычно помогают не только счастливый случай, но и память, умение быстро ориентироваться в окружающей обстановке. Кроме того, при совершении особенно сложных сделок и эти люди прибегают к помощи тех, кто великолепно разбирается по крайней мере в арифметике. Таким образом, знакомство с математикой, пусть даже в весьма скромном объеме, как правило, неизбежно. Иное дело — сомнение в том, может ли коммерсант извлечь практическую пользу из знакомства с высшей математикой. Люди, разбирающиеся и в математике, и в коммерции, отвечают на него отрицательно. Все же мы осмелимся высказать (хотя бы в форме предположения) суждение о том, что математическое образование позволяет научить даже ранее не подготовленных людей мыслить абстрактно и точно, непредвзято оценивать обстановку, что само по себе представляет известную ценность для человека практического.

Кроме того, существуют некоторые формы финансовых операций, которые невозможно производить, не располагая довольно широкими познаниями в математике. Например, солидное математическое образование необходимо тем, кто занимается страхованием жизни. Страховые общества назначают размеры страховой премии на основе вероятности смерти лица, желающего застраховать свою жизнь. Аналогичные расчеты производятся

при определении шанса на выигрыш в различных играх, в том числе и наиболее простых азартных играх: рулетке, баккара, игре в кости, «чет-нечет» и т. д.

*Теория вероятностей* опирается на понятие математической вероятности. Существуют определенные классы событий, относительно которых из проведенных опытов известно, что одни из них равновероятны, другие обладают большей, а третьи — меньшей вероятностью. Теория вероятностей учит, как, зная вероятность этих событий, вычислять вероятность других, более сложных или более простых, событий. Цель теории вероятностей состоит в вычислении определенных чисел, называемых математическими вероятностями. Числа эти подобраны так, чтобы они всегда были неотрицательны, не превосходили единицы и чтобы вероятность события  $C$ , состоящего в том, что происходит одно из двух взаимоисключающих событий  $A$  или  $B$ , была равна сумме вероятностей события  $A$  и события  $B$ . Кроме того, вероятность достоверного (заведомо происходящего) события должна быть равна 1. Отсюда следует, что вероятность невозможного события  $N$  равна 0. Действительно, поскольку событие  $C$ , состоящее в том, что происходит либо событие  $N$ , либо событие  $P$ , совпадает с событием  $P$  (поскольку событие  $P$  достоверно, а событие  $N$  невозможно) и поскольку события  $N$  и  $P$  взаимоисключающие (из-за невозможности  $N$ ), то вероятность комбинации событий «либо  $N$ , либо  $P$ » совпадает с вероятностью события  $P$ . Обозначим вероятности событий  $N$ ,  $P$  и  $C$  малыми буквами  $n$ ,  $p$  и  $c$ . Тогда

$$c = n + p,$$

$$c = p,$$

$$n + p = p,$$

$$n = 0.$$

Доказательство обратного утверждения — о том, что событие, вероятность которого равна 0, невозможно, — наталкивается на непреодолимые трудности. (Впрочем, причина этих трудностей ясна, а само утверждение ошибочно.)

Иногда заранее можно сказать, что математические вероятности двух событий должны быть равными. Так

происходит в тех случаях, когда физические условия протекания обоих событий не позволяют выделить ни одно из них. Например, при бросании идеально однородной игральной кости вероятность выпадения грани  $a$  такая же, как и любой другой грани  $b$ , если начальное положение кости, ее масса и сообщенная ей при бросании скорость неизвестны. Возможность заранее предсказать, что те или иные события равновероятны, особенно часто встречается в различных играх. Например, вероятность вытащить наугад из перетасованной колоды (в 52 карты) пикового туза равна вероятности вытащить любую другую карту. Поскольку *какая-то* карта заведомо будет вытащена, то вероятность этого события равна 1. Вытащив карту  $a$ , мы исключаем события, состоящие в вытягивании из колоды карт  $b$ ,  $c$ ,  $d$  и т. д. Следовательно, вероятность вытащить *какую-то* карту равна сумме вероятности вытащить пикового туза, вероятности вытащить бубнового короля и т. д. Таким образом,

$$1 = p + p + \dots + p = 52p, \text{ откуда } p = \frac{1}{52}.$$

На такого рода соображениях и основано применение теории вероятностей к играм.

Помимо правила сложения вероятностей существует еще правило *умножения вероятностей* \*. Сформулируем это правило. Обозначим для краткости вероятность события  $X$  через  $\pi(X)$ . Чему равна вероятность события  $I$ , состоящего в том, что одновременно происходят события  $X$  и  $Y$ ? Ясно, что вероятность  $\pi(I)$  есть функция вероятностей  $\pi(X)$  и  $\pi(Y)$ , то есть как-то зависит от  $\pi(X)$  и  $\pi(Y)$ . Предположим что  $\pi(I)$  зависит *только* от вероятностей событий  $X$  и  $Y$ , составляющих событие  $I$ . Обозначим для еще большей краткости  $\pi(I)$ ,  $\pi(X)$  и  $\pi(Y)$  через  $i$ ,  $x$ ,  $y$ . Тогда

$$i = f(x, y).$$

Если событие  $Y$  достоверно, то вероятность того, что события  $X$  и  $Y$  происходят одновременно, такая же, как и вероятность события  $X$ , поскольку событие  $XY$  при до-

---

\* Приводимое нами доказательство этого правила не является необходимым для понимания дальнейшего текста.

стоверном  $Y$  эквивалентно событию  $X$ . Следовательно,

$$i = \pi(XY) = \pi(X) = x,$$

$$y = \pi(Y) = 1,$$

или

$$x = f(x, 1). \quad (1)$$

Если событие  $Y$  состоит в том, что наблюдается одно из двух взаимоисключающих событий  $U$  и  $V$ , то

$$\pi(Y) = \pi(U) + \pi(V),$$

или

$$y = u + v.$$

То тогда событие  $I$ , или  $XY$ , состоит в том, что наблюдается либо  $XU$ , либо  $XV$ , а поскольку события  $U$  и  $V$  взаимоисключающие, то события  $XU$  и  $XV$  также исключают одно другое. Таким образом,

$$\pi(I) = \pi(XU) + \pi(XV),$$

или

$$i = f(x, y) = f(x, u) + f(x, v).$$

Поскольку  $y = u + v$ , то

$$f(x, u + v) = f(x, u) + f(x, v). \quad (2)$$

Наконец, вспомним, что

$$0 \leq f(x, y) \leq 1. \quad (3)$$

Если мы фиксируем переменную  $x$  (положим ее равной  $a$ ), то  $f(a, y)$  станет функцией  $\varphi(y)$  одной переменной  $y$ . Относительно  $\varphi(y)$  известно, что при  $0 \leq u \leq 1$ ,  $0 \leq v \leq 1$ ,  $0 \leq u + v \leq 1$  она обладает свойством (2), то есть удовлетворяет соотношению

$$\varphi(u + v) = \varphi(u) + \varphi(v),$$

и (3):

$$0 \leq \varphi(u) \leq 1.$$

Кроме того,

$$\varphi(1) = a.$$

Следовательно,  $\varphi(y)$  — так называемая аддитивная ограниченная функция, принимающая при  $y = 1$  значение  $\varphi(1) = a$ . В теории функций доказывается, что такая функция должна быть равна  $ay$ .

Итак,

$$\varphi(y) \Rightarrow ay,$$

или

$$f(a, y) = ay.$$

Но тогда

$$f(x, y) = xy,$$

откуда

$$\pi(XY) = \pi(X) \pi(Y) *.$$

Доказанное нами правило умножения вероятностей можно сформулировать следующим образом: вероятность события, состоящего из двух независимых событий, равна произведению вероятностей составляющих его событий.

Теория вероятностей никогда не дает гарантии, что то или иное событие действительно происходит. Теория вероятностей, величественные контуры которой мы попытались бегло очертить в нескольких строках, учит, что вычисление вероятностей основано на приписывании тем или иным событиям чисел, позволяющих как-то охарактеризовать взаимосвязь событий. Неоднократно предпринимались попытки применить теорию вероятностей к построению беспроигрышной системы игры в азартные игры, например в рулетку.

Что же говорит теория вероятностей относительно шансов на выигрыш в рулетку?

При игре в рулетку шансы игрока на выигрыш (при постоянной ставке) одинаковы при любом запуске шарика и примерно на 3% меньше, чем шансы крупье. Шансы игрока не зависят от того, какая последовательность цветов (красного и черного) выпадала при предыдущем запуске шарика, поскольку механизм рулетки остается одним и тем же. Какой бы системы ни придерживался игрок, шансы его на выигрыш остаются одними и теми же, а преимущество неизменно сохраняется за крупье. Записывать, в какой последовательности выпадают черный и красный цвет, совершенно бесполезно. Зато вероятность сорвать банк для игрока с неограниченным капиталом, располагающим неограниченно большим запасом времени, близка к единице независимо от

---

\* Конец доказательства.



избранной игроком системы. Действительно, если в банке находятся 100 млн. франков, то играющему, поставившему на «черное» 10 франков, достаточно выиграть 10 млн. раз подряд, чтобы банк был сорван. Вероятность того, что шарик выпадет на «черное» 1 раз, составляет  $18/37$ . Вероятность того, что шарик выпадет на «черное» 10 млн. раз подряд, равна  $(18/37)^{10\,000\,000}$ . Предположим, что мы хотим, чтобы шансы игрока сорвать банк были больше 99%. Добиться этого очень просто: достаточно повторить игру (каждая игра — 10 млн. запусков шарика) сколько раз, чтобы  $n \cdot (18/37)^{10\,000\,000} > 1$  ( $n$  — число раз), или  $n > (37/18)^{10\,000\,000}$ . Логарифмируя, находим

$$\log n > 10\,000\,000 \log 2,06 > 10^7 \cdot 0,31 \dots = 3\,100\,000.$$

Таким образом,  $n$  выражается числом, насчитывающим более 3 млн. знаков!

При другом способе игры время, необходимое для выигрыша, можно значительно сократить, увеличив ставку. Если бы разрешалось делать ставки не по 10, а по 100 млн. франков, то достаточно было бы шарика, например, остановиться на «черном» всего лишь на десяти раз больше, чем на «красном», как банк был бы сорван, причем вероятность выигрыша была бы выше 99%. Поэтому ограничение ставок в корне меняет характер азартной игры.

Теоретико-вероятностные соображения широко применяются в физике. Одним из примеров может служить *кинетическая теория газов*. Однако существуют и практические приложения теории вероятностей, гораздо более важные, чем теория азартных игр, например *теория страхования*. Она тесно связана со статистикой. Назначать страховую премию можно лишь после статистической обработки данных о смертности населения данной области, города и т. п. Страхование от пожара гораздо проще. Вероятность того, что данный дом в течение ближайшего года пострадает от пожара, вычисляют по отношению однотипных домов, сгоревших в течение года, к общему числу таких домов. Полученное отношение умножают на стоимость страхования, учитывают расходы на содержание администрации, риск и резервный фонд и в результате получают размер годовой премии по страхованию от пожара. При страховании жизни

требуется значительно более сложный математический аппарат и знание не только элементарной, но и некоторых разделов высшей математики.

Где используется на практике геометрия? Прежде всего там, где требуется измерять расстояния на поверхности Земли, площади отдельных участков поверхности и т. д. Многочисленные применения геометрии основаны на том, что при проведении прямой мы используем прямолинейность распространения световых лучей. *Геодезия* занимается определением не только площади участков земной поверхности, но и высоты отдельных точек над уровнем моря, расстояния между пунктами и т. д.

Расстояние между точками земной поверхности находят с помощью так называемой *триангуляции*. Применяя очень точные мерные ленты, определяют лишь одно расстояние — длину базиса. Затем разбивают все пространство между теми точками, которые интересуют геодезистов, на треугольники и с помощью оптических приборов измеряют углы. По измеренным углам и длине базиса вычисляют стороны треугольников и отсюда находят расстояние между точками земной поверхности. Высшая геодезия занимается определением фигуры Земли. Покрыв всю поверхность Земли сетью треугольников с известными сторонами, можно судить о длине земной оси, сплюснутости Земли у полюсов и т. д. Желая проверить, равна ли сумма внутренних углов треугольника  $180^\circ$ , Гаусс произвел в окрестности Геттингена измерение углов очень большого треугольника (вершинами его служили вершины трех гор). В неевклидовой геометрии сумма внутренних углов в треугольнике не может быть равной  $180^\circ$ . Предположим, что сумма внутренних углов в треугольнике Гаусса оказалась меньше  $180^\circ$ . Что это означало бы? Мы могли бы избрать два пути: либо считать, что свет распространяется по кривым, а евклидова геометрия соответствует геометрической оптике, либо, если бы оказалось, что предположение о свете, распространяющемся вдоль неевклидовых прямых, приводит к наиболее простым выкладкам и формулам, без колебаний принять эту гипотезу и применять в геодезии неевклидову геометрию. Рассуждения о том, каким в действительности является пространство — евклидовым или неевклидовым, безре-

зультатны, а практическая точка зрения решает спор в пользу той гипотезы, которая приводит к более простым формулам.

Применения математики в инженерном деле чрезвычайно разнообразны. Решение инженерных задач иногда требует весьма сложных математических средств. Например, теория упругости и гидродинамика в избытке применяют методы высшей математики. Однако, по общему мнению, знание высшей математики инженеру почти никогда не требуется, поскольку существуют таблицы, в которых приведены все необходимые данные о прочности балок всевозможных поперечных сечений, изготовленных из всех применяемых на практике материалов. Другие таблицы позволяют, не производя никаких выкладок, найти диаметр водопроводных труб, обеспечивающий требуемый расход воды, подобрать толщину электрических проводов и т. д. Создается впечатление, что таблицы вообще избавляют инженера от всякой математической работы. Это мнение подтверждается тем, что многие инженеры, в том числе и те, кто добивается неплохих результатов и пользуется репутацией знающего специалиста, в своей деятельности не прибегают к математике.

Как устранить противоречие между реальной жизнью и официальной теорией о необходимости математики? Проблема эта отнюдь не праздная, ибо, когда речь идет о составлении учебных программ в высших технических учебных заведениях, «практики» и сторонники математики выступают с прямо противоположными предложениями.

Разумеется, инженеру, в обязанности которого входит следить за работой машины, рассчитанной, начерченной, сконструированной, привезенной, смонтированной, отлаженной и запущенной другими, математика не нужна. Но тем, кто конструировал и изобретал машину, без математики никак не обойтись. Аналогично обстоит дело и с таблицами. Тому, кто пользуется таблицей, не нужно быть великим математиком. Тому же, кто составляет таблицу, необходимо иметь математическое образование. Поэтому на десяток инженеров-практиков необходимо иметь одного инженера-математика, ибо без таких инженеров-теоретиков невозможно развитие промышленности, невозможен технический прогресс

Иногда приходится слышать следующий аргумент, выдвигаемый против применения математики в инженерном деле: здания, возведенные по расчетам лучших инженеров, неоднократно рушились, в то время как другие, построенные «на глазок», стояли долгие годы. Разве подобные катастрофы не свидетельствуют о том, что математику не следует применять на практике?

Недоразумение здесь основано на том, что математика никогда не приводит к категорическим утверждениям типа «эта балка не выдержит нагрузки». Математик всегда формулирует свое заключение иначе: «Если дубовая балка длиной 5 м нагружена посередине сосредоточенным усилием в 470 кГ, имеет в сечении форму круга диаметром 10 см, а прочность материала на сжатие составляет 600 кГ/см<sup>2</sup>, то балка еще выдержит нагрузку».

Заключение математика представляет собой условное суждение. В предположении этого суждения среди прочего фигурирует и прочность материала на сжатие. Обычно его оценивают по *характеру* материала. Если в проведенных ста испытаниях прочность дубовых балок на сжатие была не меньше 600 кГ/см<sup>2</sup>, то по *неполной индукции* отсюда заключают, что прочность дуба на сжатие всегда не меньше 600 кГ/см<sup>2</sup>. Именно в этом заключении, весьма характерном для всех естественных наук, и кроется та ненадежность, которая свойственна всем заключениям по неполной индукции. Дуб дубу рознь. На прочность дуба на сжатие влияют тысячи мелочей: направление волокон, время, когда срубили дерево, влажность и т. д. Учесть их не в состоянии ни один инженер, поэтому инженеры и вводят «коэффициент незнания»: назначают размеры с запасом прочности, в 10 раз превышающим значение, предсказанное чистой теорией. Но материал может оказаться в 20 раз менее прочным, и тогда балка ломается, но не потому, что ненадежна математика. Виноваты скорее наши недостаточно развитые органы чувств, не позволяющие нам заглянуть внутрь дерева.

Иногда инженеры выражают свое отрицательное отношение к использованию математики потому, что во многих учебных заведениях альфой и омегой математического образования инженера считают дифференциальное и интегральное исчисления. Упрощенные способи

числений, численные методы решения уравнений, умение использовать графические методы для решения конкретных задач, знание существующих таблиц и умение в случае необходимости составлять новые и многое другое — все это находится на положении пасынка. Ясно, что инженер, который «выучил» интеграл Эйлера, но не умеет решать кубическое уравнение, будет считать математику ненужным балластом.

Некоторые сомнения в роли математики вызывают разного рода графические, механические и вообще механические методы вычисления. Диапазон вспомогательных устройств, освобождающих человеческий мозг от утомительной однообразной работы, необычайно широк: от простейшей таблицы умножения до самых сложных вычислительных машин. Иногда высказывают мнение, что в будущем вычислительные машины полностью заменят живых математиков: ведь выполняют же существующие ныне машины часть функций, которые раньше математики выполняли сами. (Обычно сторонниками такого мнения бывают люди, на которых работа сложных и точных машин произвела неизгладимое впечатление.) В действительности дело обстоит иначе. Не только теперь, но и в будущем самые хитроумные машины не заменят человека в его роли творца, создателя. Не заменят не только потому, что человек придумывает и конструирует все математические машины, но и потому, что возможности машины имеют свои естественные пределы, превзойти которые она не может.

Предположим, что некто хочет построить вычислительную машину, состоящую из зубчатых колес, рычагов и «других» подобных механических элементов и снабженную печатающим устройством. Если вращать ручку (как у старых арифмометров) и включить электромотор, то машина начнет печатать на листе бумаги цифры десятичного разложения числа  $\sqrt{2}$ , то есть 1.4142... По замыслу изобретателя, вычислением цифр, то есть всей «умственной деятельностью», должна заниматься машина, а обслуживающий ее персонал должен следить лишь за тем, чтобы шестерни были вовремя смазаны, валик, который прокатывается по поверхности бумаги, был смочен краской, и подкладывать свежую бумагу, когда старая кончится.

Задача, которую поставил себе наш изобретатель, неразрешима. Действительно, вычислительная машина, состоящая из зубчатых колес, рычагов и других механических элементов, представляет собой устройство, каждая часть которого может находиться лишь в конечном числе различных состояний. Отпечатав последовательно одну за другой несколько цифр десятичного разложения числа  $\sqrt{2}$ , машина затем должна вернуться в то состояние, в котором она уже находилась до того, как напечатала, например, цифру  $p$ . Поскольку все ее части занимают те же положения, которые они занимали тогда, машине не остается ничего другого, как напечатать цифру  $p$ . После того как цифра  $p$  будет отпечатана, машина перейдет в следующее состояние, а все ее части займут положение, которое они занимали и раньше после отпечатания цифры  $p$ . Если в прошлый раз после цифры  $p$  машина напечатала цифру  $q$ , то и теперь она сделает то же самое. Следовательно, машина будет без конца печатать периодически повторяющуюся группу цифр.

$a\bar{b}y \dots \underbrace{w\bar{p}qrs \dots z \bar{p}qrs \dots z \bar{p}qrs \dots z}_{\text{periodic sequence}}$

Но десятичное разложение числа  $\sqrt{2}$  не содержит периодически повторяющихся групп цифр, поскольку  $\sqrt{2}$  — иррациональное число. Следовательно, машина нашего изобретателя не сможет выполнить свою задачу. Не исключено, что кому-нибудь удастся построить такую машину, которая позволила бы, присоединяя к ней все новые и новые детали (пусть даже стандартные), получить любое заданное число цифр в десятичном разложении  $\sqrt{2}$ .

Никогда нельзя заранее сказать, в какой области знания найдут применение математические методы. В следующем разделе мы убедимся в том, как тесно связаны между собой математика и логика. Отрицать применимость математики поэтому означает то же, что отрицать применимость логики. Математические методы особенно успешно применяются там, где вся совокупность имеющихся данных подчиняется небольшому числу сравнительно простых отношений. Всегда ли нам удастся построить эти простые отношения, заранее сказать трудно. В качестве примера того круга явлений,



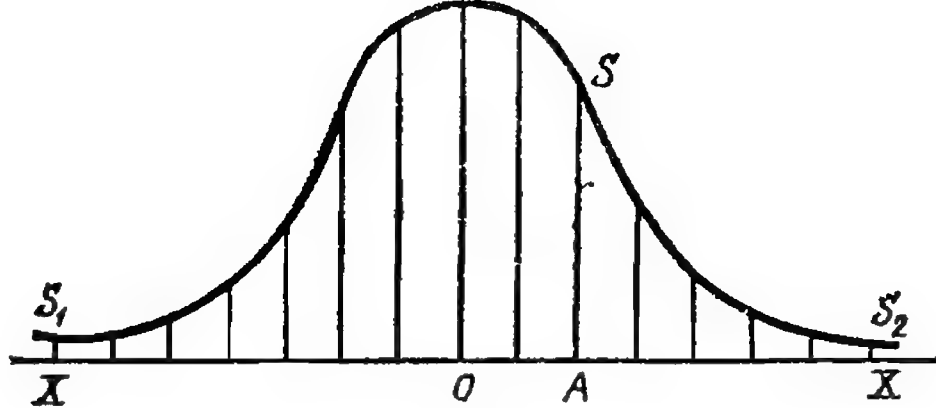


Рис. 7.

которые вследствие своей динамичности и сложности управляющих ими законов не поддаются математической трактовке, обычно приводили различные процессы, происходящие в человеческом обществе. Однако в последнее время математические методы находят все более широкое применение в экономике. Статистические методы играют все большую роль в исследовании самых разнообразных явлений. Не является препятствием и изменяющийся характер данных, поскольку теория функций занимается именно изучением соотношений между переменными величинами. Невозможность сбора всех данных, необходимых для решения проблем экономики, не является столь принципиальным препятствием для применения математических методов, поскольку математика учит, как по данным, доступным наблюдению, вычислить данные, которые наблюдению недоступны.

Биометрия применяет математические методы к описанию массовых явлений. Пусть точка  $O$  на горизонтальной оси (рис. 7) означает средний вес новобранца, призванного из некоторого района, а каждый миллиметр, отложенный направо или налево от точки  $O$ , соответствует отклонению в 1 кг (вправо условимся откладывать положительные отклонения, то есть превышение веса, влево — отрицательные). Пусть высота (в мм) вертикального отрезка  $AS$  соответствует числу процентов тех солдат, вес которых на  $OA$  превышает средний вес. Соединив концы всех вертикальных отрезков, получим кривую  $S_1S_2$ , характеризующую распределение веса новобранцев. Пользуясь методами аналитической геометрии, кривую  $S_1S_2$  можно описать одной формулой, в которой в сжатом виде будет храниться результат взвешивания тысячи солдат.



При биометрических исследованиях следует избегать принципиальной ошибки, которую совершали некоторые социологи прошлого века. Было замечено, что «частотные кривые», аналогичные построенной нами кривой  $S_1S_2$ , обладают довольно заметной устойчивостью. (Иначе говоря, частотные кривые для новобранцев, призванных из одного и того же района, в разные годы будут оставаться практически неизменными.) Кетле (1796—1874) утверждал, что процент однотипных преступлений, совершаемых в Бельгии, претерпевает лишь незначительные колебания. Отсюда Кетле делал вывод, что постоянство цифр в некоторых случаях оказывает решающее влияние на судьбу отдельных индивидуумов: если в Бельгии в среднем на год приходилось 7 убийств, а в текущем году к концу ноября совершено лишь 2 убийства, то в декабре следует ожидать 5 убийств.

Такое рассуждение полностью ошибочно: Кетле совершал ту же ошибку, что и игрок, действующий по «верной» системе.

Как известно, если запускать рулетку очень большое число раз, то отношение числа «черных» исходов (когда шарик остановится на черном делении) к «красным» исходам будет мало отличаться от 1. Однако отсюда вовсе не следует, что если в серии из 50 запусков, «черное» выпало 40, а «красное» — 10 раз, то в следующей серии из 50 запусков шарик значительно чаще будет останавливаться на «красном». Ни один цвет не имеет преимущества перед другим, а если «черное» и выпало чаще, то это никак не сказалось на механизме рулетки, не зависящем от истории. Последовательное применение теории вероятностей учит также, что если при наблюдении тысячи событий некоторое *среднее* число (например, средний процент писем, отправленных без адреса) колеблется в очень узких пределах, то с высокой вероятностью аналогичное среднее значение, вычисленное для малой группы событий (например, средний процент писем, отправленных без адреса в один и тот же день из одного и того же города), будет колебаться очень сильно. Поэтому статистика нигде не «висит» над индивидуумом как своего рода новый рок. Например, никто не заставляет вас отправлять письма без адреса: если вы захотите написать адрес на конверте, то никакая статистика не помешает вам сделать это.

Нет победы более крупной,  
чем та, что приводит к расшире-  
нию границ человеческого позна-  
ния.

Юлий Цезарь

#### IV. МАТЕМАТИЧЕСКИЙ МЕТОД

*Логика и ее законы. — Аксиомы, теоремы, условия, утвержде-  
ния, доказательства. — Топология. — Алгебра логики. — Характер ма-  
тематического метода. — «Этика» Спинозы. — Задачи: откуда они  
берутся и кто их решает.*

Цель математики состоит в том, чтобы открывать абсолютно истинные теоремы. Для достижения своей цели математика использует так называемый *дедуктив-  
ный* метод. Иначе говоря, из теорем, правильность ко-  
торых уже установлена, математика выводит новые *чисто логическим* путем, то есть путем правильных рас-  
суждений, не используя в качестве аргументов ни на-  
блюдения, ни опыт, ни ощущения, не опираясь на по-  
мощь пространственных представлений, не ссылаясь на  
очевидность или авторитет.

*Логика*, или наука о правильных умозаключениях,  
не вполне совпадает с так называемым «здравым смыс-  
лом», ибо здравый смысл считает правильным всякое  
умозаключение, которое может сослаться на то, что его  
вывод при неоднократной и всесторонней проверке не-  
изменно подтверждался. Здравый смысл говорит, что  
если  $a$  больше  $b$ , а  $b$  больше  $c$ , то  $a$  больше  $c$ . Логика  
не может признать такое заключение правильным. Точ-  
нее, логика не считает приведенное выше суждение  
ложным, но не может признать его результатом чисто  
логического рассуждения. Зато умозаключение «Если

все люди смертны, то этот человек смертен» правильно с точки зрения логики и получено чисто логическим путем.

Современная логика различает несколько типов умозаключений. К ним прежде всего относятся закон тождества: «Если  $p$ , то  $p$ » ( $p$  означает некоторое суждение); закон упрощения: «Если  $p$  и  $q$ , то  $q$ »; закон противоречия: «Если  $p$ , то не не- $p$ »; закон силлогизма: «Если из  $p$  следует  $q$ , а из  $q$  следует  $r$ , то из  $p$  следует  $r$ »; закон ложного предположения: «Если не- $p$ , то из  $p$  следует  $q$ » и множество других законов. Понятия истинности и ложности не принадлежит к числу основных понятий логики, зато понятия суждения и следования (из  $p$  следует  $q$ ) считаются основными.

В современной логике важную роль играют так называемые *пропозициональные функции*, то есть суждения, содержащие переменный символ  $x$ . Чтобы такое суждение обрело смысл, вместо  $x$  следует подставить какой-нибудь определенный символ, как-то: «Падеревский\*», «эта роза», «4». Например, пропозициональной функцией может быть суждение « $x$  умеет играть на фортепиано». Если вместо  $x$  подставить «Падеревский», то получится вполне осмысленное (истинное) суждение. Если же вместо  $x$  подставить «эта роза», то также получится суждение с вполне определенным смыслом (но ложное).

Логика использует и такие первичные понятия, как «все», «ни один» и «существует». Все  $x$ , для которых определена функция  $\varphi(x)$  (« $x$  умеет играть на фортепиано»), образуют множество — область определения пропозициональной функции  $\varphi$ . Так понятие множества входит в логику.

Пользуясь лишь законами логики, можно построить всю теорию конечных натуральных чисел. Однако доказать существование бесконечно многих натуральных чисел нам не удастся, если мы не введем специальную *аксиому бесконечности*. Эта аксиома относится уже к другой группе аксиом, чем перечисленные выше законы логики, и так же, как *аксиома выбора Цермело* (см. раздел II) и *аксиома сводимости* принадлежит к числу

---

\* Знаменитый польский пианист. — Прим. перев.

*аксиом существования*, которые кое-кто из математиков считает металоогическими (то есть лежащими вне логики) аксиомами математики.

К металоогическим аксиомам Пуанкаре причислял также *принцип математической индукции*, который можно сформулировать следующим образом: «Пусть множество  $Z$  содержит число 1 и всегда содержит данное натуральное число лишь в том случае, если оно содержит предшествующие ему натуральные числа. Тогда множество  $Z$  содержит все натуральные числа». Ясно, что принцип математической индукции не входит в число логических аксиом, но если ввести так называемые *индуктивные числа*, то обойтись можно и без него. Определить эти числа можно следующим образом. Рассмотрим все множества  $Z$ , содержащие 1, а любое следующее натуральное число — лишь в том случае, если оно содержит все предыдущие. Назовем индуктивными все те и только те числа, которые принадлежат каждому из множеств  $Z$ . Определенные так индуктивные числа будут обладать свойством, сформулированным в принципе индукции (на этот раз свойство не вводится в качестве аксиомы, а доказывается). В итоге мы получаем арифметику натуральных чисел, при построении которой не использовано ни одной чисто математической и, следовательно, металоогической аксиомы. Таким образом, арифметику натуральных чисел можно рассматривать как ветвь математики, выросшую непосредственно из логического ствола.

Мы уже говорили об аксиомах логики — ее законах. Законы логики — это принципы, которыми надлежит руководствоваться при умозаключениях. Дальнейшему анализу они не подлежат. В отличие от них математические аксиомы, например аксиомы существования, можно подвергать логическому анализу. Однако не аксиомы составляют характерную черту математики. Своеобразие математики кроется во вводимых ею *определениях*.

*Определить* новый символ — значит ввести его так, чтобы он означал то же, что и некоторый уже известный старый символ. Например, *комплексное число* — это упорядоченная пара действительных чисел. Определять можно любой символ, лишь бы один и тот же символ всегда означал одно и то же.

Математические теоремы принято формулировать в виде условных суждений, в которых предположение называется *условием* теоремы, а заключение — ее *утверждением*.

Доказать теорему означает, пользуясь логическими и математическими аксиомами, построить цепочку логических выводов так, чтобы последнее звено совпадало с утверждением теоремы. Если построить такую цепочку удастся, то говорят, что теорема *полностью доказана*. Лишь очень небольшое число математических теорем обладает полными доказательствами. Обычно построение цепочки — занятие настолько канительное, что авторы любого, даже самого подробного трактата по основаниям математики (такого, как, например, «Основания математики» Расселла и Уайтхеда) оставляют на долю читателя множество логических шагов, а сами предпочитают передвигаться скачками, перепрыгивая через отдельные части доказательства. Математики тщательно следят за тем, чтобы восстановление пропущенных шагов в доказательстве не требовало от читателя особых усилий. В противном случае говорят, что в доказательстве имеются пробелы и теорема не считается полностью доказанной.

Бегло нарисованный нами дедуктивный аппарат применяется в различных разделах математики. Многие из них удастся свести к науке о числах, или, как еще говорят, арифметизовать. Правда, арифметизация несколько удлиняет доказательство теорем, но зато существенно приближает их к идеалу полноты и позволяет избежать ошибок.

Существуют и такие разделы математики, которые не удастся, да и нет необходимости сводить к арифметике. Обычно в качестве примера приводят геометрию, но этот пример неудачен, ибо и евклидову, и неевклидову геометрию можно арифметизовать, пользуясь методом Декарта.

Примером неарифметизируемого раздела математики может служить теория совершенных чисел Кантора. Даже не вдаваясь в подробный анализ, нетрудно понять, что теория этих чисел не имеет с арифметикой ничего общего, кроме, пожалуй, своего названия, ибо в основе ее лежат особые аксиомы о существовании бесконечных множеств. Одни математики считают эти аксиомы, сфор-

мулированные уже в нашем веке, очевидными, другие — непонятными. Однако сам факт существования непротиворечивой теории, основанной на этих аксиомах рождает уверенность, что можно и в будущем ожидать открытия новых аксиом (на манер аксиомы Цермело) и основанных на них новых математических теорий. Даже если предмет этих теорий будут числа, то так же, как совершенные числа Кантора, они не будут иметь ничего общего с обычными числами, изучаемыми в арифметике. Числа, которым еще лишь суждено родиться, не будут числами ни в одном из существующих ныне значений этого слова.

Итак, мы видим, что предмет математики определяется лишь методом и что каждая дедуктивная теория может считаться математикой, однако это определение математики — не более чем рама, заполняемая лишь после введения математических аксиом, а они (в известной мере) произвольны.

Еще одно обстоятельство говорит о нежелательности отождествления математики с обычной арифметикой.

Представим себе, что существует раздел математики, который хотя и удастся свести к арифметике, но с неслыханным трудом и ценой необычайного усложнения всех формул и доказательств. Пусть первоначальная форма этого раздела математики обладает тем достоинством, что его аксиомы легко формулируются и запоминаются, его теоремы не противоречат нашей пространственной интуиции, а доказательства отличаются простотой. Каждый согласится, что первоначальная форма и есть наиболее естественная форма этого раздела математики, а возможность его арифметизации, хотя она принципиально важна и интересна, не меняет существа дела.

Такие разделы математики действительно существуют. К их числу принадлежит топология, или наука об общих свойствах формы тел. Топология не делает различия между шаром и эллипсоидом, считая их одной и той же фигурой, поскольку сферу, не прокалывая ее поверхность, непрерывной деформацией можно перевести в эллипсоид. Зато поверхность тора (бублика) нельзя непрерывной деформацией (без разрывов и склеиваний) преобразовать в поверхность сферы: сфера и тор с точки зрения топологии различные фигуры.



У топологии имеются свои интересные задачи и среди них — проблема четырех красок. Формулируется она просто: каждую карту на сфере можно раскрасить, взяв не более четырех красок. Понимать это следует так. Какими бы ни были очертания «стран» на карте, их всегда можно раскрасить так, чтобы никакие две сопредельные страны, граничащие вдоль некоторого отрезка кривой, не оказались покрашенными в один и тот же цвет, причем для такой раскраски достаточно четырех красок. Проблема четырех красок до сих пор не решена. (Для правильной раскраски карт на торе требуется семь красок. В отличие от сферы проблема семи красок для тора решена.) Топология успешно обходится без арифметизации и служит веским доводом против отождествления математики с арифметикой.

Другим примером служит *алгебра логики*, или *исчисление высказываний*, в котором латинскими буквами обозначают суждения (высказывания), знак  $\vdash$  означает «либо», знак  $\cdot$  означает «и», знак  $\longrightarrow$  означает следование («материальную импликацию») и знак  $\neg$  означает отрицание. Цифрой 1 в алгебре логики принято обозначать истинные, а цифрой 0 — ложные суждения.

*Алгебра логики* — особая алгебра, и ее правила и аксиомы отличаются от правил и аксиом обычной алгебры. Например, в алгебре логики  $a \cdot a = a$ . Словесно это равенство можно выразить так:  $a$  и  $a$  эквивалентно  $a$ . Это высказывание истинно при любом (истинном или ложном)  $a$ . Разумеется, таких формул в алгебре логики — многие тысячи, и некоторые из них весьма сильно отличаются от формул обычной алгебры. Поскольку алгебра логики обладает всеми отличительными особенностями математической теории и в то же время не является ни наукой о числах, ни наукой о величинах, то ее можно рассматривать в качестве еще одного аргумента против определения математики как науки о числах или величинах.

Итак, наиболее характерной чертой математики следует считать ее метод. *Математический метод* дедуктивный, синтетический и формальный. Поясним значение этих слов более подробно.

Мы называем математический метод *дедуктивным* потому, что единственным средством вывода, которое используется в математическом доказательстве, служит



дедукция. После того как аксиомы и определения сформулированы, математик путем чистого (то есть основанного только на законах логики) рассуждения доходит до самых сложных из известных теорем, а завтра, опираясь на теоремы, доказанные сегодня, идет еще дальше и доказывает новые, неизвестные ранее теоремы. Дедуктивный характер математических доказательств послужил некоторым «хулителям математики», например Дж. С. Миллу, поводом для того, чтобы назвать математику мельницей, перемалывающей засыпанный в нее материал, но не дающей ничего нового. По мнению таких людей, математика обречена на вечное повторение банальной истины « $a = a$ » в различных видах, не меняющих, однако, главного: как бы ни формулировал математик свои утверждения, он использует все тот же закон тождества, хотя и в «преображенном» виде. Если противники математики не правы, то потому, что развитие математики происходит не только на основе математических доказательств, но и аксиом, и определений, а они в значительной мере произвольны.

*Синтетический* характер математического метода проявляется в выборе аксиом. Говоря об аксиомах, следует иметь в виду не только математические аксиомы в собственном смысле слова (как, например, аксиома математической индукции, в которой Пуанкаре видел источник плодотворности математики и подтверждение высказанного Кантом тезиса о том, что математические суждения ( $7 + 5 = 12$ ) суть «априорные синтетические суждения»), но и логические аксиомы. Ясно, что выбор логических аксиом, пусть даже самых очевидных, например таких, как «из  $A$  следует  $A$ », происходит не логическим путем, а требует обращения к иной инстанции, которую одни называют интуицией, а другие — «чутьем к истине».

*Определение* по существу сводится к тому, что вместо какой-то комбинации старых символов используется один новый символ. Это позволяет сократить формулировки утверждений и теорем, которые в противном случае были бы трудно обозримыми. Например, словесный символ «иррациональное число» служит стенограммой, сокращением длинного выражения «разбиение рациональных чисел на два класса, удовлетворяющее условиям Дедекинда» (причем «условия Дедекинда» в свою

очередь являются условным сокращенным обозначением четырех условий, перечень которых можно найти в любом руководстве по теории иррациональных чисел). Выбор определения заранее указывает направление, в котором мы собираемся развивать математику, поскольку указывает, какую комбинацию символов мы считаем важной и заслуживающей особого сокращенного обозначения.

*Формализм* математического метода основан на том, что в математических рассуждениях понятия разрешается использовать лишь в том смысле, какой вложен в них определением. Приписывать какой-нибудь другой, не содержащийся в определении смысл, запрещается. Более того, из самого определения по возможности изгоняется все, что может привести к неясности или допустить неоднозначное толкование. Например, рассуждение «Прямая  $A$  пересекает прямую  $B$ . Следовательно, прямая  $A$  делит прямую  $B$  на две полупрямых — левую и правую» нельзя считать математическим рассуждением. Это пример так называемого «анализа понятий», излюбленного метода некоторых философов. В математике пересечение есть определенное отношение « $\cap$ » между прямыми  $A$  и  $B$ , о котором известно лишь то, что о нем сказано в аксиомах геометрии.

Можно было бы подумать, что математика наивна и ни о чем «не догадывается». Она действительно делает так, но не от наивности, а от изощренности не желает «догадываться». Формальный характер математического метода проявляется и в аксиомах, которые представляют собой не что иное, как формальные отношения между фундаментальными математическими понятиями. В свою очередь такие фундаментальные понятия, как число, точка, прямая, множество, даны нам лишь в этих формальных отношениях, и мы знаем о них лишь то, что говорят эти отношения. В нашем примере с прямой  $A$ , пересекающей прямую  $B$ , выражение « $A$  пересекает  $B$ » по определению означает лишь, что «прямые  $A$  и  $B$  имеют общую точку». Последнее утверждение в свою очередь следует понимать так: «Существует точка  $\pi$ , которая одновременно принадлежит прямой  $A$  и прямой  $B$ ». Отношение «точка  $\pi$  принадлежит прямой  $A$ » определено лишь в той мере, в какой о нем говорится в аксиомах геометрии. Правда, сообщается об этом отношении

волью много сведений. Например, из аксиом мы знаем, что «каждой прямой принадлежит по крайней мере одна точка», «каждой прямой *не* принадлежит по крайней мере одна точка» и т. д. Однако все эти сведения еще не позволяют нам вложить в выражение «прямая  $A$  пересекает прямую  $B$ » то содержание, которое подсказывает наше пространственное воображение: создать представление о точке, «по-настоящему» лежащей на прямой. Это наглядное содержание чуждо и должно быть чуждым математике, поскольку оно слишком тесно связано с чувственным восприятием, чтобы его можно было представить в форме, поддающейся логической трактовке.

Изложенная нами точка зрения явилась плодом медленной, но непрекращающейся эволюции, которую преобразовала философия математики от размышлений Лейбница над основаниями теории натуральных чисел и исследований Лобачевского, Бойяи и Гаусса по неевклидовой геометрии до определения иррационального числа Дедекинду и работ Гильберта, Пеано, Пуанкаре и Хилберта по основаниям геометрии и математической физике.

В разделе II мы уже вспоминали о самой первой, самой знаменитой и самой гениальной попытке построения дедуктивной системы — «Элементах» Евклида. И Евклиду случалось давать определения, ошибочные с точки зрения здравого смысла и бесполезные с точки зрения математики. Например, «прямая есть то, что одинаково расположено относительно всех своих точек» (окружность тоже «одинаково расположена относительно всех своих точек»). Однако если мы взглянем внимательно на доказательства Евклида, то увидим, что он нигде не прибегает к нематематическим способам рассуждения и пользуется своими ошибочными определениями. Именно поэтому у Евклида вообще нет ошибочных теорем. Такое можно сказать лишь еще об одном великом математике — Гауссе.

Сравним удачную попытку построения дедуктивной теории, предпринятую Евклидом, с другой попыткой, предпринятой много лет спустя Б. Спинозой. Этот несомненно великий философ, восхищенный монументальностью «Элементов» Евклида, решил применить математический метод к этике. Так возникло его сочинение

«Этика, изложенная геометрическим методом». Спиноза перенял у Евклида внешнюю форму его сочинения. В «Этике» есть аксиомы, теоремы, леммы, доказательства, нет лишь самого духа математического метода. Умолчим о том, что его аксиомы содержат утверждения, которые нельзя назвать не вызывающими сомнения (например, аксиома: «Сущность человека не содержит в себе необходимого существования»). Обратимся лучше к доказательству утверждения 1.

Определение 3 из части I гласит: «Под субстанцией я понимаю то, что существует само в себе, то есть представление чего не нуждается в представлении другой вещи, из которой оно должно было бы образоваться». Определение 5: «Под явлением я понимаю видоизменение субстанции, или то, что есть в другом, посредством чего оно также представляется».

Из определений 3-и 5, по Спинозе, следует утверждение 1: «Субстанция по природе предшествует своим состояниям».

Прежде всего обратим внимание, что определения 3 и 5 «двойные»: небольшое словечко «или», фигурирующее в каждом из них, означает логическую постановку, позволяющую позднее заменять «то, что существует в чем-то ином» на «разрушение субстанции». Но даже если допустить такие определения, то формальный метод позволяет вывести из определений 3 и 5 лишь то, что: 1) явление не есть субстанция; 2) для понимания понятия субстанции не требуется понятия явления и т. д. Утверждение 1, устанавливающее с помощью выражения «посредством» какое-то новое (временное?) отношение между субстанцией и явлением, формально не следует из определений 3 и 5.

Справедливости ради следует добавить, что предмет рассматриваний голландского философа был гораздо труднее, чем у Евклида, и его идеи, очищенные от геометрической «шелухи», обладают большой ценностью и были бы не менее очевидны, если бы Спиноза излагал их без мнимых «доказательств».

Каждый знает, что заниматься математикой означает не только читать доказательства известных теорем. Всю прелесть математики составляют нерешенные задачи. Универсального метода, который позволял бы решать любые задачи, не существует. Имеются лишь ме-

тогда решения задач определенного типа, или, как говорят школьники, примеров. Решить пример означает подставить в известной математической теореме вместо общего символа некоторый конкретный символ и прочитать то, что при этом получится. Например, из общей теории следует, что если  $x - a + b = c$ , то  $x = a - b + c$ . Поэтому, если кому-нибудь потребуется решить уравнение  $x - 7 + 5 = 3$ , то ему достаточно подставить  $a = 7$ ,  $b = 5$ ,  $c = 3$ , чтобы получить ответ:  $x = 7 - 5 + 3 = 5$ . Решить задачу означает понять, истинна или ложна некая теорема, и затем доказать или опровергнуть ее. Математический метод позволяет проверить правильность доказательства, когда оно уже написано, но ничего не говорит о том, как его искать. Можно воспользоваться ценными советами, содержащимися в известном сочинении Декарта «Рассуждение о методе». Декарт рекомендует разбивать каждую трудную задачу на столь простые, чтобы их можно было решить, а затем обратным ходом, поднимаясь ступень за ступенью в гору, восстановить решение исходной задачи. Однако иногда даже эти весьма разумные советы бывают столь же бесполезными, как альпеншток и канат в руках туриста, пытающегося взобраться на стометровую отвесную стену, на которой нет ни единой трещинки. Опыт, знание многих математических теорем и, что гораздо важнее, их доказательств, умение обнаружить аналогию между известными теоремами и предметом собственных исследований, терпение, изобретательность в комбинировании идей, отстоящих далеко друг от друга, и, наконец, трудно определимое чутье, «математические способности», обостренная интуиция — вот инструменты, с которыми истинный математик отправляется на поиски новых теорем. Если ему немного «повезет» и участок леса, в котором он ищет математического зверя, не слишком исхожен другими, то охота может закончиться успешно.

Иногда даже сложные математические задачи формулируются совсем просто, как, например, следующая задача. Доказать, что существует бесконечно много простых чисел вида  $x^2 + 1$ , где  $x$  — натуральное число. Иначе говоря, требуется доказать, что в последовательности  $1^2 + 1 = 2$ ,  $2^2 + 1 = 5$ ,  $3^2 + 1 = 10$ ,  $4^2 + 1 = 17$ ,  $5^2 + 1 = 26$ ,  $6^2 + 1 = 37$ , ... содержится бесконечно много простых чисел 2, 5, 17, 37, ... . Ясно, что для решения

задачи недостаточно выписать даже несколько тысяч членов этой последовательности и найти среди них несколько сот простых чисел. С помощью описанного выше метода требуется найти общее доказательство того, что для любого натурального  $M$  найдется такое число  $N (N > M)$ , что число  $N^2 + 1$  будет простым. Доказательство этого утверждения до сих пор не найдено. Математики знают, что это очень трудная задача, ибо даже доказательство так называемой теоремы Дирихле об арифметической прогрессии, согласно которой «каждая арифметическая прогрессия с взаимно простыми первыми членами (то есть первыми членами, не имеющими других общих делителей, кроме 1) содержит бесконечно много простых чисел», было впервые найдено П. Г. Лежан-Дирихле (1837 г.) с помощью интегрального исчисления и других столь же неэлементарных методов. Из теоремы Дирихле следует, что в арифметической прогрессии вида  $4n + 1$ , то есть в прогрессии 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, ..., содержится бесконечно много простых чисел 5, 13, 17, 29, .... Сразу видно, что утверждение о числах вида  $x^2 + 1$  не легче теоремы Дирихле, ибо  $x^2$  существенно усложняет доказательство.

Столь же просто формулируется и другая трудная и до сих пор не решенная задача — так называемая великая теорема Ферма. Она гласит: при  $n \geq 3$  уравнение  $x^n + y^n = z^n$  не имеет решений в целых числах  $x, y, z, n$ . (При  $n = 2$  решение в целых числах существует, например  $3^2 + 4^2 = 5^2$ .) П. Ферма жил в Тулузе в XVII в. и был одним из лучших математиков своего времени.

Иногда самый характер задачи наводит на мысль о том, что подлежащее доказательству утверждение ошибочно. В этом случае математик пытается найти *контрпример* или построить некий математический объект, удовлетворяющий условию, но противоречащий утверждению теоремы. Например, если кто-то выскажет утверждение «Все числа вида  $p! + 1$  простые, если число  $p$  простое», то мы будем выписывать по очереди

$$2! + 1 = 3, \quad 3! + 1 = 7, \quad 5! + 1 = 121$$

и найдем контрпример, поскольку число 5 простое, а 121 — составное. Следовательно, высказанное утверждение ошибочно.



Предположим, что автор первого утверждения изменил его и теперь отстаивает новую гипотезу: «Произведение  $n$  первых простых чисел плюс единица всегда равно простому числу».

Попробуем найти контрпример:

$$\begin{aligned}2 + 1 &= 3, & 2 \cdot 3 + 1 &= 7, & 2 \cdot 3 \cdot 5 + 1 &= 31, \\2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 + 1 &= 211, & 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 + 1 &= 2311, \\2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 &= 30\,031 = 59 \cdot 509.\end{aligned}$$

Пять первых попыток, *казалось бы*, подтверждают новую гипотезу, и тот, кто захотел бы воспользоваться *полной индукцией*, счел бы ее истинной. Но шестая попытка приводит к желаемому результату: число 30 031 оказывается составным, что противоречит высказанной гипотезе.

Аналогично обстоит дело и с числами вида  $2^{2^n} + 1$ . Ферма предполагал, что все такие числа простые, но пятая проба дает число

$$2^{32} + 1 = 4\,294\,967\,297 = 641 \cdot 67\,004\,17.$$

Те же замечания можно сделать и по поводу так называемых теорем существования, в которых требуется доказать, что математический объект с заранее заданными свойствами существует или соответственно не существует. Например, в теории алгебраических уравнений наряду с классической задачей о разрешимости данного уравнения в радикалах можно поставить задачу о том, каждое ли алгебраическое уравнение имеет хотя бы один корень. Эту задачу решил Даламбер. Он доказал, что в области комплексных чисел каждое алгебраическое уравнение имеет хотя бы один корень. Лишь в современной математике (начиная с XIX в.) чистые теоремы существования выступили на первый план. Они придают всей математике особый оттенок: утверждение о том, что какой-то объект скрытно (ибо неизвестно, как его найти или построить) *существует*, возводит математику в ранг творца и озаряет его работу метафизическим ореолом.

Как следует ставить задачи? Довольно часто задачи возникают из известных математических теорем при их



обобщении или по аналогии. Известно, например, что число 2 рациональное, а число  $\sqrt{2}$  иррациональное. Производя над этими двумя числами все четыре арифметических действия, получаем числа  $2 + \sqrt{2}$ ,  $2 - \sqrt{2}$ ,  $2 \cdot \sqrt{2}$  и  $2 : \sqrt{2} = \sqrt{2}$ . Все эти числа иррациональные. Однако мы не можем с такой же легкостью сказать, будет ли рациональным или иррациональным число  $2^{\sqrt{2}}$ . Это очень трудная задача.

Столь же естественно возникает и другая трудная задача: встречается ли число 4 бесконечно много раз в десятичном разложении числа  $\sqrt{2}$ ? Аналогичные вопросы можно задать и относительно  $\sqrt{3}$ ,  $\sqrt{5}$  и т. д.

При постановке задач необходимо формулировать их так, чтобы они не были тривиальными, то есть чтобы их нельзя было решить «не сходя с места». Примером тривиальной задачи может служить вопрос о том, встречается ли четверка бесконечно много раз в десятичном разложении числа  $1/7$ . Ответ (утвердительный) можно дать почти не задумываясь: десятичное разложение  $1/7 = 0, (142857) \dots$  представляет собой *периодическую дробь*. Зато аналогичный вопрос относительно числа  $\sqrt{\pi}$  уже труден.

Задачи должны быть по возможности несложными, однако это отнюдь не означает, что задачи должны быть простыми. Придумывать сложные задачи нетрудно, но если целью науки должно быть описание наиболее широкого круга явлений в наиболее простой форме, то искусственно сложных задач следует избегать.

Существуют два источника *естественных* задач: во-первых, обобщение известных теорем (об этом мы уже говорили) и доказательство вспомогательных теорем, необходимость в которых возникает при попытке доказать другие теоремы, и, во-вторых, приложения. Например, при исследовании движения математического маятника мы встречаемся с дифференциальным уравнением (уравнением движения) вида

$$\ddot{\vartheta} + \frac{g}{l} \sin \vartheta = 0$$

(здесь  $\vartheta$  — угол отклонения маятника от вертикали,  $\ddot{\vartheta}$  — угловое ускорение маятника,  $l$  — длина нити,  $g$  —

ускорение свободного падения), решить которое элементарными способами невозможно. Пытаясь все же найти решение, мы приходим к ныне уже хорошо развитой теории эллиптических интегралов.

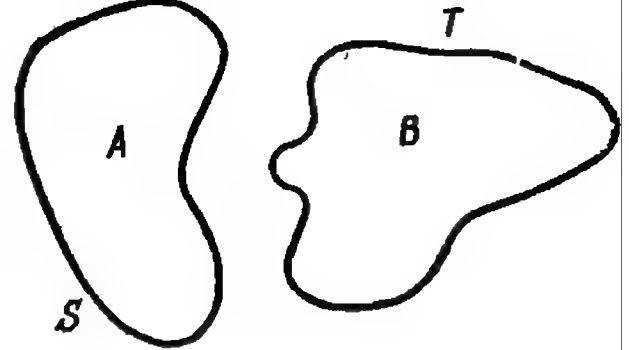


Рис. 8.

Механика, оптика, физика Земли и другие разделы физики поставили перед математикой тысячи задач. В качестве типичного примера можно сослаться на теорию потенциала, задачи которой выросли на благодатной почве электростатики и теории тяготения. Быстро развиваясь, теория потенциала превратилась в математическую теорию, изобилующую интереснейшими задачами, порой не имеющими прямого физического смысла.

Рассмотрим другую задачу (рис. 8), на этот раз из области картографии: всегда ли можно произвольную область  $A$  отобразить на заранее заданную область  $B$  так, чтобы малые части области  $A$  при отображении переходили в *подобные* им части области  $B$  и граница  $S$  области  $A$  переходила в границу  $T$  области  $B$ . Эта задача — одна из важнейших проблем теории функций. Доказательство возможности ее решения составляет содержание *теоремы о конформном отображении*, доказанной Б. Риманом (1826—1866).

Развитие математики может происходить и по совершенно иному пути. Этот путь открыт лишь для гениальных умов, способных взглянуть с совершенно иной точки зрения на подход к решению стоящих перед математикой задач, интерпретировать их как частный случай общих, еще не известных, а лишь интуитивно ощущаемых закономерностей, ввести новые определения, аксиомы и создать целые математические теории. Примерами таких гениальных открытий могут служить «Элементы» Евклида, зачатки интегрального исчисления в работах Архимеда, метод математической индукции Мавролико и Паскаля, аналитическая геометрия Декарта, дифференциальное исчисление Ньютона, логическое исчисление Лейбница, неевклидова геометрия Лобачевского, Бойяи и Гаусса, теория функций комплексного переменного Коши, теория римановых по-

верхностей и работа «О гипотезах, лежащих в основании геометрии» Римана, теория групп Галуа, теория множеств Г. Кантора и теория типов Расселла.

В истории математики таких львиных прыжков не так уж много. Их значение состоит в том, что после каждого из них проходят столетия напряженной работы. Другие математики систематизируют и извлекают следствия из теорий, созданных гениями.

Весьма большое значение для развития математики могут иметь и открытия, лишенные столь революционного характера. Таково, например, изобретение Непером (1614 г.) логарифмов. Оно неслыханно упростило вычисления, связанные с необходимостью умножать, делить, возводить в степень, извлекать корни различных степеней. Вместо всего этого потребовалась гораздо более кропотливая, но одноразовая работа по составлению таблиц логарифмов. Такого рода упрощения приносят гораздо большую пользу прикладным наукам, чем математическим теориям. Сам математический метод также может служить источником интересных и важных задач. Вот одна из них: каждую ли математическую теорему можно доказать или опровергнуть? Более точно: всегда ли выполняется альтернатива, состоящая в том, что можно доказать либо утверждение, либо его отрицание? Речь идет не о том, чтобы найти способ, позволяющий доказать или опровергнуть утверждение, а о принципиальной разрешимости математических задач. Этот вопрос тесно связан с аксиоматикой, или наукой о математических аксиомах. Известно, например, что задача о параллельных не решена в «обобщенной» геометрии, система аксиом которой не содержит аксиомы о параллельных. В арифметике ничего подобного пока установить не удалось. Однако с большой вероятностью можно предположить, что аксиому бесконечности или аксиому выбора Цермело не удастся вывести как теорему из других аксиом. Обе они представляют собой истинные аксиомы, независимые от остальных аксиом теории множеств.

Какие математические теоремы следует считать важными? Такие, которые просто формулируются, не требуют большого числа определений и позволяют легко решать много известных, но ранее не решенных задач. Целесообразность введения новых определений и фор-

мулирование с их помощью новых теорем пропорциональна важности этих теорем, понимаемой в только что указанном смысле. Определение степени важности тесно связано с историческим взглядом на математику. Суть его сводится к тому, что направление развития математики от прошлого до настоящего определяет направление ее развития в ближайшем будущем.

В математике можно говорить о моде и даже о причудах моды. Например, сейчас в моде алгебраические методы. В двадцатых годах нашего века модной была теория множеств, еще раньше — теория функций комплексного переменного. Оставляя классическую теорию и занимаясь исключительно новыми задачами, современные математики поступают вполне разумно, ибо ни один критерий, кроме принципа исторической преемственности развития науки, не пригоден для оценки перспективности новых направлений и эта преемственность вплоть до настоящего времени не прерывалась. Некоторые считают важными лишь те задачи, решения которых могут быть чем-то полезны физике. Однако в физике можно найти применение каждой математической теореме, ибо любая форма логического рассуждения может оказаться полезной при исследовании реального мира. Тот, кто полагает, будто теория дифференциальных уравнений в большей мере отвечает потребностям механики, судит о вещах лишь с позиций современного состояния математики. Нет ни одного веского довода, в силу которого одни разделы математики более подходили бы для изучения природы, чем другие. И если сегодня теория ординальных чисел не находит применения в физике, то это означает лишь, что физические теории пока формулируются в таком виде, который не позволяет применять к ним теорию ординальных чисел. Зато в статистической механике используется одно из последних достижений теории множеств — мера Лебега. Чем больше в нашем распоряжении будет готовых математических форм и методов, тем легче окажется физику выбрать то, что ему особенно необходимо в данный момент. В этом отношении потребности науки можно уподобить обычным человеческим потребностям: уже одно то, что для удовлетворения их существует множество самых разнообразных средств, служит стимулом дальнейшего роста потребностей.

*Меня и поныне глубоко трогает усердный неопит, перед глазами которого, когда он узнает, как вычисляется площадь поверхности сферы, померкнет свет.*

*Лейбниц*

## **V. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ И ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ**

*Множества, функции и их приложения. — Производные, их приложения и история. — Интегралы, их приложения и история. — Дифференциальные уравнения, обыкновенные и с частными производными.*

Мы уже неоднократно объясняли, какой смысл математики вкладывают в понятие *множества*. Особенно важную роль в математике играют числовые множества. Примерами таких множеств служат множество натуральных чисел 1, 2, 3, 4, ..., множество всех отрицательных чисел, а также множество всех чисел вообще. Отдельное число, принадлежащее множеству, называется его элементом.

Пусть  $X$  означает некое одно, а  $Y$  — некое другое множество. Установим закон, по которому каждому числу  $x$ , принадлежащему множеству  $X$ , ставится в соответствие вполне определенное число  $y$ , принадлежащее множеству  $Y$ . (Пусть, например,  $X$  означает множество действительных чисел,  $Y$  — множество натуральных чисел. Условимся считать, что каждому числу  $x$  соответствует натуральное число  $y$ , равное номеру места, на котором стоит первая после запятой пятерка в десятичном разложении числа  $x$ . Если пятерка не встречается в десятичном разложении, то по определению мы полагаем  $y = 1$ . Числу  $x = 0,111... = 1/9$  при этом соответствует  $y = 1$ , числу  $x = 0,05$  соответствует  $y = 2$ , числу

$x = 6,225$  соответствует  $y = 3$ .) Итак, мы установили соответствие между элементами множества  $X$  и множества  $Y$ . Такого рода соответствия принято называть *функциональной зависимостью* между *независимой переменной*  $x$  и *зависимой переменной*  $y$ . Кратко функциональную зависимость записывают в виде формулы

$$y = f(x).$$

Буква  $f$  служит обозначением функциональной зависимости (ясно, что написать, например, просто  $y = x$  нельзя, ибо в рассмотренном нами примере  $x = 1/9$  соответствует  $y = 1$ ). Величина  $f(x)$  так же, как и зависимая переменная  $y$ , меняется в зависимости от переменной  $x$ , но в обозначении  $f(x)$  явно указана независимая переменная  $x$  и символ функциональной зависимости  $f$ , поэтому оно более наглядно характеризует вступившие в игру новые понятия.

Уточним сказанное. Величина  $f(x)$  обозначает тот элемент  $y$  множества  $Y$ , который поставлен в соответствие элементу  $x$  множества  $X$  при данной функциональной зависимости  $f$ . Если вместо независимой переменной  $x$  мы будем подставлять ее конкретные значения 5; 7; 3,14;  $-1$ ; 0; ..., то переменная  $f(x)$  примет конкретные значения  $f(5)$ ,  $f(7)$ ,  $f(3)$ ,  $f(14)$ ,  $f(-1)$ ,  $f(0)$ , ..., совпадающие с теми элементами  $y$ , которые соответствуют значениям  $x$ , равным 5; 7; 3,14;  $-1$ ; 0; ... (В случае рассмотренного нами выше отображения  $f(1/9) = 1$ ,  $f(0,05) = 2$ ,  $f(6,225) = 3$ ,  $f(3,14) = 1$ ,  $f(7) = 1$  и т. д.) Буква  $f$  сама по себе не означает определенной функциональной зависимости. С тем же успехом вместо  $f(x)$  мы могли бы написать  $g(x)$  или  $h(x)$ . Лишь однозначно определив (с помощью словесного описания или любым другим способом) соответствие между значениями независимой переменной  $x$  и зависимой переменной  $y$ , обозначаемое нами буквой  $f$  (или  $g$ ,  $h$ , ...), мы придаем ей определенный смысл.

Рассмотрим, например, такое выражение, как  $x + 1$ . При любом  $x$  ( $x = 5$ ; 7; 3,14;  $-1$ ; 0; ...) это выражение имеет вполне определенный смысл, поскольку символы  $5 + 1$ ;  $7 + 1$ ;  $3,14 + 1$ ;  $1 + 1$ ;  $0 + 1$ ; ... и вообще  $x + 1$  всегда имеют на языке арифметики известное значение. Следовательно, если принять  $x$  за независимую, а  $x + 1$  — за зависимую переменную, то полу-



чится функциональная зависимость, для которой словесное описание будет излишним. Аналогично  $y = x^2$ ,  $y = x^3$ ,  $y = x^3 - 2x + 5$ ,  $y = \sqrt{5}$  могут служить примерами функциональных зависимостей, задаваемых выражениями.

В природе, в повседневной жизни и в науке мы весьма часто встречаемся с взаимосвязанными явлениями. Если какая-то из характерных сторон одного явления подвергается изменению, то и какая-то из сторон зависящего от него явления также претерпевает изменения. Поскольку изменения носят количественный характер, мы можем рассматривать интересующие нас стороны явлений как величины, доступные измерению, и говорить о функциональной зависимости между явлениями. Установив функциональную зависимость, мы стараемся выразить ее в виде формулы, а затем исследуем полученную формулу с помощью имеющихся в нашем распоряжении математических средств. Установив различные математические свойства выражений, описывающих функциональную зависимость, мы сравним их с данными опыта. Согласие между теорией и экспериментом подтверждает те естественнонаучные гипотезы, которые мы использовали при выводе формул. Расхождение будет означать, что наши гипотезы необходимо заменить другими. На этом, собственно говоря, и основано применение математики к естественным наукам.

Рассмотрим два примера. В 1602 г. Галилей занялся изучением свободного падения тел. Свободно падающее тело движется ускоренно. Сначала Галилей считал, что скорость  $y$  тела пропорциональна пройденному пути  $x$ . Иначе говоря, полагал, что отношение  $y$  к  $x$  постоянно и равно некоторому числу  $c$ . Отсюда следовало соотношение  $y = cx$ . Однако выводы, следовавшие из этого соотношения, противоречили опыту, поэтому Галилей отказался от своей первой гипотезы и заменил ее другой — о том, что скорость пропорциональна времени, сделав тем самым первый шаг к ньютоновской механике, сохранившей свое значение до наших дней.

Другой пример. Из опыта известно, что коэффициент объемного расширения идеальных газов (такие реальные газы, как водород, гелий и т. п. при не слишком больших давлениях ведут себя почти как идеальные газы) равен  $1/273$ . Следовательно, при увеличении тем-



ператутры на  $t$  градусов объем газа увеличивается на  $t/273$  первоначального объема. Таким образом, если при температуре  $0^\circ$  объем газа был равен  $v_0$ , то при температуре  $t^\circ$  его объем  $v_t$  будет на  $v_0 \frac{t}{273}$  больше, или

$$v_t = v_0 + v_0 \frac{t}{273} = v_0 \left(1 + \frac{t}{273}\right).$$

Поскольку (по закону сохранения материи) объем данной массы газа никогда не может быть равным нулю (и тем более отрицательному числу), то  $v_t > 0$ , или

$$v_0 \left(1 + \frac{t}{273}\right) > 0$$

при всех  $t$ . Первый множитель  $v_0$ , означающий объем газа при температуре  $0^\circ$ , положителен. Следовательно, второй множитель также должен быть положительным, чтобы положительным было все произведение. Отсюда

$$1 + \frac{t}{273} > 0, \text{ или } t > -273.$$

Таким образом, газовый термометр, то есть термометр, основанный на принципе постоянства коэффициента объемного расширения идеального газа, никогда не показывает температуру ниже  $-273^\circ$ . К этому выводу мы пришли чисто математическим путем, рассматривая объем газа  $v$  как функцию  $v(t)$  температуры  $t$ . Вид этой функции мы определили из опытов, произведенных над газами с помощью обычных стеклянных термометров. Вопрос о том, можно ли гипотезу о постоянстве коэффициента объемного расширения газа, найденную при сравнении объема газа с движением столбика ртути в термометре при средних температурах, распространить на низкие температуры, лишен смысла, поскольку при низких температурах ртуть в стеклянных термометрах замерзает, а для устройства газового термометра мы пользуемся только что развитой теорией, которая, разумеется, не приводит к противоречию с наблюдениями, производимыми с помощью того же газового термометра. Не следует, однако, думать, что при таком положении вещей мы не извлекли никакой физической информации — наоборот, построив на основе нашей теории газовые термометры с двумя различными газами, мы убедимся, что их показания со-

гласуются. Это свидетельствует о том, что понятие температуры, определенное с помощью гипотезы о постоянстве коэффициента объемного расширения газа, имеет физический смысл.

Разумеется, те функциональные зависимости, которые встречаются в физике и в других науках о природе, отнюдь не исчерпывают все типы функций, какие только может придумать математик. Особенно часто в природе встречаются функции, обладающие одной характерной особенностью, никак не следующей из приведенного выше определения функции, — *непрерывностью*.

Обратимся, например, к физиологии. Среди прочего она изучает и изменение температуры тела животного на различных этапах процесса пищеварения. Температура  $W$  тела данного животного есть функция времени  $t$ , поскольку каждому моменту времени  $t$  соответствует вполне определенное значение  $W$ . Функция  $W(t)$  не может изменяться скачком, если время  $t$  изменяется непрерывно. Действительно, даже если бы температура в течение одной секунды возросла на целый градус, то в течение одной сотой секунды она не могла бы измениться особенно заметно. Функции, обладающие таким свойством, как  $W(t)$ , называются *непрерывными*. Более точное определение гласит: функция  $y = f(x)$  называется непрерывной, если, выбрав достаточно малое приращение независимой переменной  $x$ , мы можем сделать сколь угодно малым приращение зависимой переменной  $y$ . Например, функция  $y = x^2$  непрерывная, поскольку при увеличении  $x$  на  $h$  переменная  $y$  возрастает на  $(x + h)^2 - x^2 = 2hx + h^2 = h(2x + h)$ , а выбрав достаточно малое число  $h$ , мы всегда можем добиться, чтобы величина  $h(2x + h)$  была меньше любой заранее заданной величины.

Не следует думать, однако, что все функции непрерывны. Нетрудно видеть, например, что функция  $f(x)$ , принимающая при целых  $x$  значение, равное 1, а при всех остальных действительных значениях  $x$  — значение 0, не непрерывна (*разрывна*).

Аналитическая геометрия позволяет представлять функциональные зависимости, например  $y = x$ ,  $y = 2x - 1$ ,  $y = x^2$ , в виде графиков, рассматривая каждую пару значений  $x$  и  $y$ , поставленных в соответствие одно другому, как координаты точки плоскости, на кото-

рой проведены оси  $Ox$  и  $Oy$ . Рассмотрим, например, функцию  $y = x$ . Как известно, ее график совпадает с биссектрисой угла  $xOy$ . Графиком функции  $y = 2x - 1$  служит другая прямая, график функции  $y = x^2$  имеет вид параболы. Еще раз подчеркнем, что графики всех этих функций образуют сплошные (непрерывные) линии, поскольку сами изображаемые функции непрерывны.

Рассматривая графики функций, нетрудно заметить, что прямая  $y = 2x - 1$  наклонена к оси  $Ox$  круче, чем прямая  $y = x$ , причем угол наклона каждой из прямых постоянен. Крутизна наклона кривой  $y = x^2$  сначала мала (при  $x = 0$  значение функции  $y$  также равно 0). В точке  $x = 1$ ,  $y = 1$  (там, где парабола пересекает прямую  $y = x$ ), ее наклон к оси  $Ox$  уже превышает наклон прямой  $y = x$  и совпадает с наклоном прямой  $y = 2x - 1$ , а в точках, расположенных еще правее по оси  $Ox$  (например, в точке  $x = 2$ ,  $y = 4$ ), парабола становится еще круче. За меру наклона кривой в данной точке к оси  $Ox$ , очевидно, можно принять угол наклона касательной к кривой, проведенной в данной точке. Возникает задача: как вычислить угол наклона касательной к оси  $Ox$ .

Если мы имеем дело с прямой, которая, как известно, служит графиком функции  $y = cx + d$ , то вычислить угол ее наклона к оси  $Ox$  совсем нетрудно. Для этого достаточно знать, во сколько раз функция  $y$  возрастает быстрее (или медленнее), чем независимая переменная  $x$ . Действительно, если  $x$  возросла на  $h$ , то  $y = cx + d$  возросла на  $c(x + h) + d - (cx + d) = ch$ . Поэтому искомое отношение равно  $ch/h = c$ .

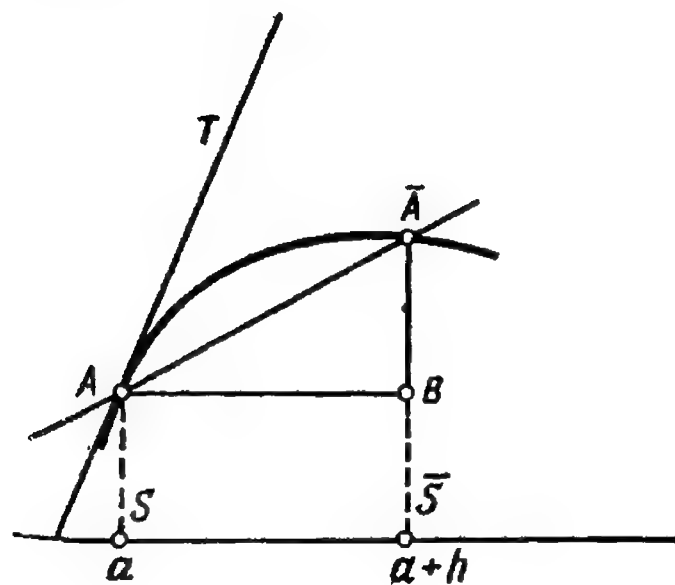


Рис. 9.

Если интересующая нас кривая задана уравнением  $y = f(x)$  (рис. 9), то мы временно заменим ее прямой, проходящей через точки  $A$  и  $\bar{A}$  с абсциссами  $a$  и  $a + h$ . Приращению абсциссы  $h$  соответствует приращение  $\bar{A}B$  ординаты, которое, как видно из рис. 9, равно  $\bar{S}A\bar{S}B = \bar{S}A - SA =$

$= \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ . Поэтому искомое отношение равно  $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ . Это выражение служит мерой наклона

секущей  $A\bar{A}$ , но еще не позволяет судить о наклоне к оси  $Ox$  касательной  $AT$  в точке  $A$ : как видно из рис. 9, касательная может образовывать с осью  $Ox$  больший угол, чем секущая. Чем меньше приращение  $h$ , тем меньше различие между секущей и касательной и углами, которые та и другая образуют с осью  $Ox$ , тем ближе отношение  $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  к искомой величине. Оказывается, что наклон касательной (точнее, тангенс угла наклона касательной к оси  $Ox$ ) совпадает с пределом отношения  $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  при  $h$ , стремящемся к нулю:

$$n = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Лагранж (1736—1812) ввел для этого предела специальное обозначение:  $f'(a)$ . Итак,

$$n = f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Оно очень удачно, поскольку угол наклона зависит лишь от рассматриваемой кривой, то есть от функции  $f(x)$ , и от выбора точки на ней, то есть от абсциссы  $a$  и ординаты  $f(a)$  этой точки. Таким образом, все определяется заданием двух величин:  $f$  и  $a$ , а именно они и входят в обозначение, предложенное Лагранжем. Заметим, что  $f'(x)$  есть снова функция переменной  $x$ .

Функция  $f'(x)$  называется *производной* функции  $f(x)$ , а сама  $f(x)$  служит *первообразной* для функции  $f'(x)$ . Функции  $f(x)$  и  $f'(x)$  совершенно различны. Следует подчеркнуть, что подобно тому, как  $f'(a)$  означает  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ , так и  $f'(x)$  означает

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Возьмем, например, функцию  $y = x^2$ , подставим  $x^2$  вместо  $f(x)$  попытаемся вычислить  $f'(x)$ , то есть найти

$$\frac{(x+h)^2 - x^2}{h},$$

а затем его предел при  $h \rightarrow 0$ . Итак, приступаем к выкладкам:

$$\frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{2hx + h^2}{h} = 2x + h.$$

При  $h \rightarrow 0$  выражение  $2x + h$  стремится к  $2x$ . Таким образом, искомый предел равен  $2x$ , или  $f'(x) = 2x$ . Именно такой величине равен тангенс угла наклона касательной, проведенной к параболе в точке с абсциссой  $x$ . Мы видим, что угол наклона переменный: он зависит от  $x$ . И действительно, чем больше  $x$ , тем круче парабола. В точке  $x = 1$  тангенс угла наклона равен  $2 \cdot 1 = 2$ , наклон касательной к параболе совпадает с наклоном прямой  $y = 2x - 1$  (тангенс угла, образуемого этой прямой с осью  $Ox$ , также равен 2). Поскольку прямая  $y = 2x - 1$  проходит через точку  $x = 1, y = 1$  (координаты точки, если их подставить в уравнение прямой, обобщают его в тождество), а именно эту точку параболы мы сейчас рассматриваем, то эта прямая совпадает с касательной к параболе в точке  $x = 1, y = 1$  (наклон прямой и касательной к оси  $Ox$  одинаков). Таким образом, этой задаче мы впервые встречаемся с теорией касательных к произвольным кривым, или с *дифференциальным исчислением*. Роберваль и Ферма заложили основы дифференциального исчисления, имея в виду именно геометрическую задачу о построении касательной к данной кривой в данной точке.

Другой пример применения дифференциального исчисления мы заимствуем из механики. Рассмотрим точку, движущуюся вдоль прямой. Если в любой момент времени  $t$  известен путь  $s$ , пройденный точкой с некоторого начального момента времени  $t_0$ , то  $s$  можно рассматривать как функцию  $s(t)$  переменной  $t$ . Скорость  $v$  также можно считать функцией времени  $v(t)$ . В числителе отношения

$$\frac{s(t+h) - s(t)}{h}$$

стоит разность между путем, пройденным точкой к моменту времени  $t+h$ , и путем, пройденным к моменту времени  $t$ , или длина пути, пройденного за время от  $t$  до

$t + h$ . Промежуток времени, в течение которого пройден этот отрезок пути, равен  $h$ . Именно его величина и стоит в знаменателе отношения. Таким образом, наша дробь выражает отношение пути, пройденного за некоторый промежуток времени, к величине этого промежутка, или *среднюю скорость* в интервале времени от  $t$  до  $t + h$ . Если мы захотим узнать не среднюю, а *мгновенную скорость* точки  $v(t)$  в момент времени  $t$ , то интервал времени  $h$  придется брать все меньше и меньше. Иначе говоря, чтобы найти мгновенную скорость  $v(t)$ , мы должны вычислить предел

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h}$$

или (по определению производной) величину  $s'(t)$ . Итак,

$$v(t) = s'(t).$$

Таким образом, скорость точки в данный момент времени равна значению производной от пути (рассматриваемого как функция времени), вычисленному для того же момента времени. Решая именно эту задачу механики, Ньютон пришел к понятию производной.

Не все функции имеют производную, так же как не все кривые имеют касательные. Со времен Вейерштрасса (1815—1897) до наших дней математики построили множество удивительных примеров «патологических» функций, полностью или частично лишенных производных.

Теория касательных получила название *дифференциального* исчисления по следующей причине. Создатель исчисления Лейбниц (1646—1716) определил производную следующим образом. Рассмотрим функцию  $y = f(x)$ . Дадим независимой переменной  $x$  приращение  $\Delta x$  и вычислим разность  $f(x + \Delta x) - f(x)$ , то есть приращение  $\Delta y$  зависимой переменной  $y$ , вызванное приращением  $\Delta x$ . Иначе говоря, вместо

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

мы можем написать  $\Delta y / \Delta x$ . Если теперь вместо  $\Delta x$  взять *бесконечно малое приращение*  $dx$ , а вместо  $\Delta y$  — соответствующее *бесконечно малое приращение*  $dy$ , то отношение  $dy/dx$  и будет искомой производной:  $dy/dx = f'(x)$ .

Отсюда и название *дифференциал* — так творцы новых понятий назвали бесконечно малые величины  $dy$ ,  $dx$ . Использовали они и такую форму записи:

$$dy = f'(x) dx.$$

Немецкий философ Гегель обратил внимание на противоречие, содержащееся в рассуждениях основателей дифференциального исчисления. Если дифференциал  $dx$  равен нулю, то произведение  $f'(x)dx$  также равно нулю. Следовательно, равен нулю и дифференциал  $dy$ . Однако равенство  $dy = f'(x)dx$  остается верным, какое бы число мы ни подставили вместо  $f'(x)$ , поскольку  $0 = 2 \cdot 0$ ,  $0 = 5 \cdot 0$  и т. д. Следовательно, выражение  $dy = f'(x)dx$  не содержит ничего нового и его, минуя сложные рассуждения, можно написать сразу, поскольку даже элементарных основ арифметики достаточно, чтобы понять: произведение нуля и любого числа равно нулю. Если же дифференциал  $dx$  отличен от нуля, то равенство  $dy = f'(x)dx$  неверно, ибо даже для простейшей функции  $y = x^2$  мы получаем следующее:  $f'(x) = 2x$ ,  $dy = (x + dx)^2 - x^2 = 2xdx + (dx)^2$ . Но  $f'(x)dx = 2xdx$ . Следовательно, при  $dx \neq 0$

$$dy > f'(x) dx.$$

Из этого противоречия Гегель вывел любопытное заключение. Он не только не «осудил» дифференциальное исчисление, но и усмотрел в противоречии, содержащемся в основах этого раздела математики, причину плодотворности и преимущества высшей математики над математикой элементарной. Будучи лишеной противоречия, последняя, по мнению Гегеля, осуждена на вечное повторение в различных видах банальной истины  $x = a$ .

Критика оснований теории функций, предпринятая Больцано и Вейерштрассом, доказала необоснованность мнения Гегеля. Если производную вводить как предел некоторого отношения (именно так мы и делали, хотя и без подробного обоснования каждого шага), то все понятия и формулы (правда, записанные несколько иначе) дифференциального исчисления можно получить, не используя понятие дифференциала. Пользуясь случаем, мы хотели бы особенно подчеркнуть полную несостоятельность мнения, встречающегося и поныне, согласно кото-



рому «строгую» элементарную математику следует отличать от якобы «нестрогого» дифференциального исчисления. Давным-давно известно, что дифференциальное исчисление по строгости ничуть не уступает арифметике и, более того, что его можно арифметизовать, то есть свести к арифметике. Логические трудности, кроющиеся в основаниях математики (о них мы еще будем говорить), в равной степени угрожают и элементарной, и высшей математике. Если же их устранить, то никаких особых мер по спасению дифференциального исчисления предпринимать не придется.

Функция  $f'(x)$ , полученная как производная от функции  $f(x)$ , сама может иметь производную  $f''(x)$ , которая называется второй производной, или производной второго порядка, функции  $f(x)$ . В рассмотренном нами примере первая производная функции  $x^2$  равна  $2x$  ( $f'(x) = 2x$ ). Поскольку первая производная функции  $2x$  равна 2, а первая производная первой производной — это вторая производная исходной функции, то  $f''(x) = 2$ , или  $(x^2)'' = 2$ .

Вернемся к нашему примеру из области механики — точке, движущейся вдоль прямой, и посмотрим, чему там соответствует понятие второй производной. Напомним, что функция  $s(t)$  означает путь, пройденный точкой от некоторого начального момента времени  $t_0$  к текущему моменту времени  $t$ ,  $v(t) = s'(t)$  — мгновенная скорость точки. Рассуждая так же, как при выводе зависимости между  $v(t)$  и  $s(t)$ , нетрудно понять, что *мгновенное ускорение*  $a(t)$  совпадает со второй производной функции  $s(t)$ , то есть

$$a(t) = s''(t).$$

Подчеркнем, что выражения  $v(t) = s'(t)$ ,  $a(t) = s''(t)$  — единственно строгие математические определения скорости и ускорения.

По аналогии со второй производной можно определить производные третьего, четвертого и более высоких порядков, которые мы обозначим  $f'''(x)$ ,  $f^{IV}(x)$ , ...,  $f^n(x)$ . Одной из наиболее важных формул дифференциального исчисления следует считать так называемый *ряд Тейлора*

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \dots$$

позволяющий (при весьма общих предположениях) представлять функцию  $f(x)$  в виде *степенного ряда*.

Нетрудно доказать, что производная суммы (разности) равна сумме производных слагаемых (уменьшаемого и вычитаемого), то есть что из

$$R(x) = F(x) - g(x)$$

следует

$$R'(x) = F'(x) - g'(x). \quad (1)$$

Если в каждый момент времени известна скорость движущегося тела, а необходимо вычислить проходимый им путь, то математически задача сводится к следующему. Дана производная  $s'(t)$  (то есть скорость). Требуется найти исходную функцию  $s(t)$  (то есть путь как функцию времени). Отысканием функций по их производным занимается *интегральное исчисление*.

Например, исходной (или, как принято говорить, *первообразной*) для функции  $2x$  является функция  $x^2$ . Первообразной для функции, тождественно равной нулю, служит такая функция, производная которой *тождественно* равна нулю. Касательная к графику этой функции в любой точке должна составлять нулевой угол с положительным направлением оси  $x$ . Следовательно, сама функция должна быть *постоянной*:  $f(x) = c$ .

Итак, производная функции  $x^2 + c$  равна  $2x + 0 = 2x$ , то есть для функции  $2x$  первообразной служит не только функция  $x^2$ , но и любая функция  $x^2 + c$ , например  $x^2 + 1$ ,  $x^2 - 5$ ,  $x^2 + 3,7$  и т. д.

Пусть  $f(x)$  — данная непрерывная функция и  $F(x)$  — ее первообразная. Соотношение между ними можно представить в виде

$$F'(x) = f(x). \quad (2)$$

Какой геометрический смысл имеет первообразная  $F(x)$  функции  $f(x)$ ? Начертим график функции  $f(x)$  (рис. 10) и проведем две вертикальные прямые  $aA$  и  $xB$ . Площадь фигуры, ограниченной этими прямыми, отрезком  $ax$  оси  $X$  и дугой  $AB$  графика функции  $f(x)$ , зависит лишь от точки  $x$ , если прямая  $aA$  считается неподвижной, а прямая  $xB$  перемещается вместе с точкой  $x$ . Обозначим площадь криволинейной трапеции  $aABx$  через  $g(x)$ . Если точка  $x$  совпадает с точкой  $a$ , то площадь трапеции

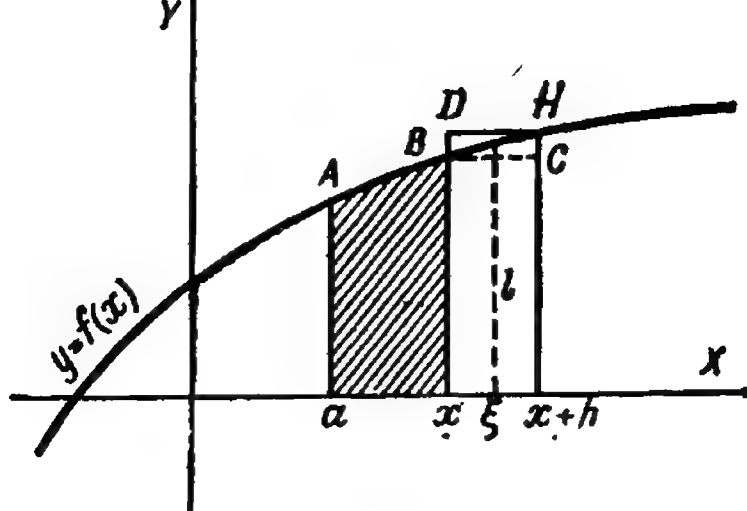


Рис. 10.

равна нулю. Следовательно,  $g(a) = 0$ . Значение функции  $g(a+h)$  равно площади криволинейной трапеции, ограниченной отрезком  $[a, x+h]$  оси  $X$ , боковыми сторонами  $aA$  и  $[(x+h), H]$  и дугой  $AH$ , поэтому разность  $g(x+h) - g(x)$  равна площади трапеции  $xBH[x+h]$ . Длина ее основания равна  $(x+h) - x = h$ , а площадь больше площади прямоугольника  $xBC[x+h]$ , но меньше площади прямоугольника  $xDH[x+h]$ . Первый прямоугольник имеет основание  $h$  и высоту  $f(x)$ . Второй прямоугольник имеет то же основание, что и первый, но его высота равна  $f(x+h)$ . Следовательно, площадь криволинейной трапеции  $xBH[x+h]$  равна  $hl$ , где  $l$  — некоторое число, заключенное между  $f(x)$  и  $f(x+h)$ . Если  $x$  пробегает все значения в интервале  $[x, x+h]$ , то  $f$  пробегает все значения, в том числе и  $l$ , заключенные в интервале от  $f(x)$  до  $f(x+h)$ . Таким образом, при некотором  $\xi$ , лежащем между  $x$  и  $x+h$ , выполняется равенство  $f(\xi) = l$ . Площадь криволинейной трапеции, равная  $hl$ , оказывается равной  $h \cdot f(\xi)$ . Поскольку мы уже знаем, что эта же площадь равна  $g(x+h) - g(x)$ , то

$$g(x+h) - g(x) = hf(\xi),$$

или

$$f(\xi) = \frac{g(x+h) - g(x)}{h}. \quad (*)$$

Фиксируем  $x$  и устремим приращение  $h$  к нулю. При этом правая часть равенства  $(*)$  обратится в  $g'(x)$ . Число  $\xi$ , заключенное между  $x$  и  $x+h$ , при  $h$ , стремящемся к нулю, будет стремиться к  $x$ . Но если  $\xi$  стре-

мится к  $x$ , то  $f(\xi)$  стремится к  $f(x)$ , поскольку  $f$  — непрерывная функция. Следовательно, при  $h$ , стремящемся к нулю, левая часть равенства (\*) обращается в  $f(x)$ . Поскольку равенство правой и левой частей равенства (\*) не нарушается при переходе к пределу, мы получаем, что

$$g'(x) = f(x). \quad (3)$$

Таким образом,  $g(x)$  есть не что иное, как первообразная функция  $f(x)$ .

Вычислим теперь производную разности  $R(x) = F(x) - g(x)$ . Из выражений (1), (2), (3) следует, что

$$R'(x) = F'(x) - g'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Следовательно, производная функции  $R(x)$  равна нулю, сама функция  $R(x)$  равна постоянной:  $R(x) = c$  при всех  $x$ , или

$$F(x) - g(x) = c.$$

Полагая  $x = a$  (из определения функции  $g(x)$  как площади криволинейной трапеции  $aABx$  следует, что  $g(a) = 0$ ), получаем

$$F(a) - 0 = c,$$

или

$$c = F(a),$$

откуда

$$F(x) - g(x) = F(a),$$

$$g(x) = F(x) - F(a).$$

Функция  $g(x)$ , равная площади криволинейной трапеции, ограниченной отрезком  $[x, x+h]$  оси  $x$ , прямыми  $A$  и  $Bx$ , параллельными оси  $y$ , и дугой  $AB$  графика функции  $f(x)$ , называется *интегралом* функции  $f(x)$ , взятым от  $a$  до  $x$ , и обозначается так:

$$g(x) = \int_a^x f(x) dx.$$

Последнее выражение можно записать иначе:

$$\int_a^x f(x) dx = F(x) - F(a).$$

Это соотношение означает, что интеграл от  $a$  до  $x$  непрерывной функции  $f(x)$  равен разности между значениями

ее первообразной в точках  $a$  и  $x$ . Геометрически это означает, что приращение ординаты первообразной  $F(x)$  при изменении независимой переменной от  $a$  до  $x$  равно площади криволинейной трапеции, ограниченной дугой графика подынтегральной функции  $f(x)$ , отрезком  $[a, x]$  оси  $x$  и ординатами, проведенными через концы этого отрезка.

Двойное — формальное и геометрическое — истолкование так называемой основной теоремы интегрального исчисления сразу же позволяет решать важнейшую прикладную задачу интегрального исчисления — вычисление площадей, или квадратур, и учит, как находить интегралы, или площади, с помощью первообразной функции.

В 1906 г. известный издатель работ Архимеда (287—212 гг. до н. э.) датский математик Гейберг прибыл в Константинополь, чтобы в библиотеке одного из монастырей прочитать палимпсест, на который обратил его внимание Г. Шене. Среди прочих сочинений Гейберг обнаружил ранее неизвестную работу Архимеда под названием «Письмо к Эратосфену о методе Архимедова доказательства теорем механики». В этом сочинении, которое Гейберг опубликовал в 1907 г., Архимед, в частности, говорит следующее: «Не единожды то, что мне сначала удавалось понять с помощью механики, я потом доказывал геометрически, ибо рассуждения первого метода не были основаны на доказательствах. В то же время легче доказать правильность решения, найденного с помощью механического метода, чем изобретать доказательство, не имея никакого представления о том, как решать задачу».

Слова Архимеда относятся к решению задач из области статики: вычислению центров тяжести и моментов инерции различных фигур и тел. Решая эти задачи, Архимед разрезал тела и фигуры на тонкие слои — так же, как это делали мы при выводе основной теоремы интегрального исчисления. Поэтому Архимед по праву считается одним из основателей дифференциального и интегрального исчисления.

Основная теорема интегрального исчисления позволяет нам решать задачи, о которых Архимед писал Эратосфену, значительно короче и проще. Например, если нам потребуется вычислить площадь криволинейного

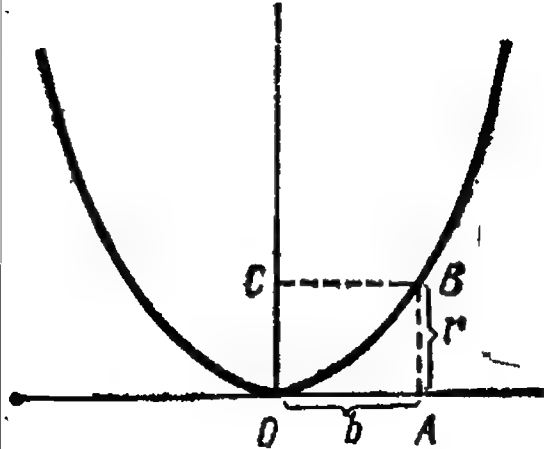


Рис. 11.

треугольника (рис. 11), образованного дугой  $OB$  параболы  $y = px^2$  и отрезками  $OA$  и  $AB$  (абсцисса точки  $A$  равна  $b$ ), то, по определению интеграла, достаточно вычислить интеграл

$$\int_0^b px^2 dx.$$

Чтобы воспользоваться основной теоремой интегрального исчисления, необходимо найти первообразную функцию для  $px^2$ . Попробуем сначала найти первообразную для  $x^2$ , то есть функцию, производная которой равна  $x^2$ . Для «пробы» возьмем функцию  $x^3$ . Тогда

$$\frac{(x+h)^3 - x^3}{h} = \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - x^3}{h} = 3x^2 + 3xh + h^2.$$

При  $h \rightarrow 0$  это выражение стремится к  $3x^2$ . Следовательно, производная от  $x^3$  равна  $3x^2$ , а производная функции  $x^3/3$  равна  $x^2$ . Таким образом, первообразная функция  $px^2$  имеет вид  $px^3/3$ . Чтобы найти площадь  $P$  нашего криволинейного треугольника, необходимо вычислить приращение функции  $px^3/3$  при изменении  $x$  от 0 до  $b$ :

$$P = \frac{pb^3}{3} - \frac{p \cdot 0^3}{3} = p \frac{b^3}{3}.$$

Итак, площадь криволинейного треугольника  $OAB$  равна  $pb^3/3$ . Но высота  $r$  прямоугольника  $OACB$  равна длине отрезка  $AB$ , и точка  $B$  лежит на параболе. Следовательно, координаты точки  $B$  удовлетворяют уравнению  $y = px^2$ .

$$r = pb^2.$$

Подставляя в полученную формулу для площади криволинейного треугольника  $r$  вместо  $pb^2$ , получаем

$$P = \frac{pb^3}{3} = \frac{pb^2 \cdot b}{3} = \frac{rb}{3} = \frac{\text{площадь прямоугольника } OACB}{3}.$$

Таким образом, дуга  $OB$  параболы делит прямоугольник  $OACB$  на две части, из которых верхняя имеет вдвое большую площадь, чем нижняя. Это знал еще Архимед.

Интегральное исчисление позволяет вычислять длины дуг различных кривых, площади фигур (плоских и искривленных), объемы тел, находить положение центров тяжести, моменты инерции и статические моменты и т. д. Этим и обусловлено необозримое поле приложений интегрального исчисления в технике.

Обозначение интеграла  $\int_a^b f(x) dx$ , в явном виде содержащее дифференциал  $dx$ , своим происхождением обязано иному способу введения интеграла, чем тот, которым воспользовались мы. Отрезок  $[a, b]$ , по которому берется интеграл (рис. 12), разбивают на полоски шириной  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ :

$$\begin{aligned} a &= x_1, \\ x_2 &= x_1 + \Delta x_1, \\ x_3 &= x_2 + \Delta x_2, \\ &\dots \dots \dots \\ b &= x_{n+1}. \end{aligned}$$

Затем вычисляют сумму площадей прямоугольников шириной  $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots$  и высотой  $f(x_1), f(x_2), \dots$ :

$$\Delta x_1 f(x_1) + \Delta x_2 f(x_2) + \dots + \Delta x_n f(x_n) = \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i.$$

Неограниченно уменьшая ширину прямоугольников, получают в пределе площадь  $P$  криволинейной трапеции.

При этом в сумме  $\sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i$  приращения  $\Delta x_i$  неограниченно убывают, а число  $n$  слагаемых неограниченно возрастает. Для предела этой суммы математики и придумали специальное обозначение  $\int_a^b f(x) dx$ , в котором знак интеграла  $\int$  заменил знак суммы  $\Sigma$ , а место конечного приращения  $\Delta x$  занял дифференциал  $dx$ .

Дифференциальное и интегральное исчисления входят в так назы-

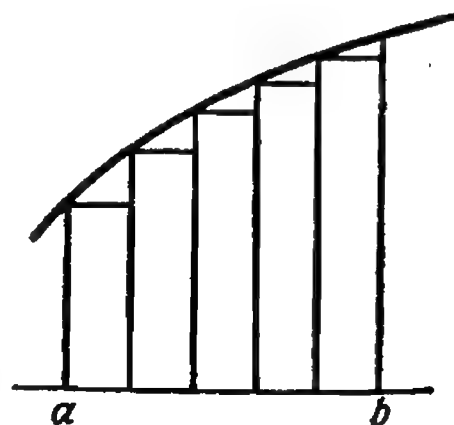


Рис. 12.



ваемый *математический анализ*, охватывающий и другие разделы математики. Среди них прежде всего необходимо назвать теорию *дифференциальных уравнений*. Решая такие уравнения, мы по заданному соотношению между неизвестной функцией и ее производными восстанавливаем функцию, удовлетворяющую этому соотношению. Например, уравнение

$$y'(x) = y(x)$$

дифференциальное. Решить его значит найти функцию от  $x$ , которая совпадала бы со своей производной. (Мы привели это уравнение лишь в качестве примера. Его решением служит функция  $y = e^x$ , где  $e = 2,718281828$  — так называемое неперово число, или основание натуральных логарифмов. Смысл числа  $e$  проще всего объяснить так: это величина, которой достигнет к концу года единый капитал, положенный из расчета 100% годовых при непрерывном начислении процентов.)

Особенно важную роль дифференциальные уравнения играют в динамике, занимающейся изучением движения тел под действием заданной системы сил. Из второго закона Ньютона известно, что величина силы равна произведению массы на ускорение. Попробуем применить эти сведения к решению следующей задачи. Вдоль прямой движется некоторое тело. На него со стороны точки, лежащей на той же прямой, действует сила отталкивания. Определить закон движения тела, если сила отталкивания пропорциональна расстоянию между телом и отталкивающей точкой.

Обозначим это расстояние через  $s(t)$ , тогда

$$a(t) = ks(t),$$

где  $a(t)$  — ускорение тела, а  $k$  — коэффициент пропорциональности. Поскольку ускорение — это вторая производная от функции  $s(t)$ , то  $a(t) = s''(t)$  и, следовательно,

$$s''(t) = ks(t).$$

Мы снова получили дифференциальное уравнение. На этот раз оно содержит вторую производную и поэтому называется дифференциальным уравнением второго порядка. (Его решение имеет вид  $s(t) = e^{t\sqrt{k}}$ .)

Теория дифференциальных уравнений развивалась главным образом в XIX в. в трудах Коши (1789—1857),

Вейерштрасса, Софьи Ковалевской, Фукса и позднее, уже в XX в., Пенлеве, Пуанкаре и многих других математиков.

Наряду с функциями одной переменной иногда приходится рассматривать функции двух, трех и большего числа переменных.

Примером функции двух переменных может служить так называемая гипсометрическая карта, на которой указана высота точек над уровнем моря. Действительно, представим себе, что каждая точка на карте снабжена пометкой, указывающей ее высоту над уровнем моря. Ясно, что высоту  $w$  можно рассматривать как функцию двух переменных: географической широты  $x$  и долготы  $y$  точки. Иначе говоря, зная широту  $x$  и долготу  $y$  точки, мы могли бы, взглянув на карту, установить ее высоту  $w$  над уровнем моря и написать

$$w = f(x, y).$$

Как известно из аналитической геометрии трехмерного пространства, для того чтобы составить уравнение искривленной поверхности (то есть по существу составить гипсометрическую карту), необходимо взять три взаимно перпендикулярные оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , проходящие через точку  $O$ , выбранную за начало координат. Тогда любую точку пространства можно задать, указав три числа  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , выражающих расстояние от этой точки до плоскостей  $yOz$ ,  $xOz$  и  $xOy$ . Уравнение поверхности мы получим, задав зависимость между «высотой» каждой ее точки  $z$  над плоскостью  $xOy$  от ее «географической широты»  $x$  и «географической долготы»  $y$ , то есть от положения проекции точки на плоскости  $xOy$ . Зная эту зависимость, то есть зная  $z$  как функцию  $f$  переменных  $x$  и  $y$ , мы записываем  $z = f(x, y)$  и получаем *уравнение поверхности*.

Температура  $T$  в комнате может служить примером функции трех переменных. Действительно, температура в точке зависит от положения точки в пространстве, а оно определяется тремя числами  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Если же нам потребуется следить за изменением температуры в разное время суток, то температура  $T$  станет функцией не только точки, но и времени  $t$ , то есть функцией четырех переменных:

$$T = f(x, y, z, t).$$

В современной математике рассматривают также функции бесконечно большого числа переменных, но даже геометрическое представление функции трех переменных наталкивается на большие трудности.

Например, чтобы наглядно изобразить распределение температуры в комнате, понадобилось бы не только построить миниатюрную модель комнаты, но и каким-то образом наполнить ее краской, различные оттенки которой соответствовали бы изменениям температуры. Мы могли бы повесить в различных точках модели шарики, окрашенные в различные оттенки нужного цвета, хотя модель от этого стала бы трудно обозримой, в особенности если бы нам понадобилось передать мелкие подробности распределения температуры.

Однако уже в нашем веке прикладная математика сумела преодолеть некоторые трудности, связанные с графическим представлением функций многих переменных.

## VI. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ МАТЕМАТИКА

*Таблицы. — Логарифмическая линейка. — Машины для сложения и умножения. — Приборы для вычерчивания различных кривых. — Элементарные графические методы. — Номография. — Графостатика. — Начертательная геометрия.*

Принято считать, что вычисления — это главное, чем занимаются математики. Нередко, желая высказать одобрение тому или иному стратегу, политическому деятелю или коммерсанту, люди отчасти в шутку, отчасти всерьез говорят, что он умеет «математически точно» рассчитать каждый свой шаг. Но все расчеты, с которыми приходится иметь дело военачальникам, политическим деятелям или коммерсантам в обычных условиях, либо относятся к области элементарной арифметики и, следовательно, не требуют более глубоких познаний в математике, чем те, которыми владеет школьник младших классов, либо являются «расчетами» в особом смысле слова, то есть по существу сводятся к учету различных привходящих обстоятельств, своеобразной «бессознательно формулируемой теорией вероятности», хорошо известной любителям азартных игр. Такие «расчеты», хотя и требуют опыта и известной «числовой» интуиции, позволяющей примерно оценивать и сравнивать различные величины, имеют очень мало общего со столь последовательной наукой, как математика, оперирующей лишь точно определенными понятиями. Даже «расчеты», производимые при игре в шахматы, где правила и все необходимые данные строго определены, не относятся к области математики. Даже самый лучший шахматист, обладающий ярко выраженной способностью к комбинационной игре, рассуждает примерно так: «Если я сделаю ход  $a$ , то противник ответит ходом  $b$  или  $c$ . На мой ход

*d* может последовать ход *e* или *f*, зато на ход *g* противник ответит единственным ходом *h*. Ход *i* приводит к безнадежному ухудшению моей позиции. А что если мне совершить ход *m*? На него противник может ответить только ходом *p*, который я смогу парировать ходом *q*, дающим мне известное преимущество. Итак, сделаю-ка я ход *m*!»

Мы видим, что шахматист пользуется такими понятиями, как «ухудшение позиции», «преимущество» и т. д., причем его оценка позиции, основанная на опыте и не связанная с логическим анализом, в конечном счете опирается на опыт и только на опыт. Лишь иногда шахматная игра обретает строгий характер. Мы имеем в виду шахматные этюды и некоторые задачи-«концовки», в которых фигуры специально расставлены так, что позиция допускает полный анализ.

Математические вычисления встречаются там, где собственно математическая работа уже закончена, то есть задача решена, и речь идет лишь о том, чтобы довести до конца выкладки, то есть, руководствуясь известными правилами, выполнить определенный объем чисто механической работы. Для выполнения такой «бездумной», но кропотливой и трудоемкой работы математики придумали самые разнообразные средства. К их числу относятся, например, русские счеты или таблицы умножения.

Одним из самых мощных вспомогательных средств (до сравнительно недавнего времени) были логарифмические таблицы, изобретенные Непером (1614 г.). Они основаны на том, что при умножении двух чисел, записанных в виде степени одного и того же основания, показатели степеней складываются:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Условимся выбирать в качестве основания степени какое-нибудь определенное число, например 10. Тогда

$$10^m \cdot 10^n = 10^{m+n}.$$

Желая умножить  $x$  на  $y$ , мы представляем  $x$  в виде  $10^\xi$ ,  $y$  — в виде  $10^\eta$  и получаем

$$x \cdot y = 10^\xi \cdot 10^\eta = 10^{\xi+\eta} = I.$$

Затем мы находим  $\sigma = \xi + \eta$  и вычисляем  $10^\sigma$ . Это число равно искомому произведению  $I$ .

Итак, если мы будем располагать неким вспомогательным средством, позволяющим любое число  $x$  представлять в виде  $10^\xi$ , то есть для каждого  $x$  находить такое  $\xi$ , которое бы удовлетворяло соотношению  $x = 10^\xi$ , и по известному  $\sigma$  находить  $10^\sigma$ , то умножение двух чисел мы всегда сумеем свести к сложению (каких-то других чисел). Число  $\xi$ , удовлетворяющее равенству  $x = 10^\xi$ , называется *логарифмом числа  $x$  по основанию 10* или *десятичным логарифмом числа  $x$* . Например, десятичный логарифм числа 100 равен 2, десятичный логарифм числа 0,1 равен  $-1$ . Таблица логарифмов — это перечень чисел, рядом с которыми указаны их логарифмы. В зависимости от того, какие цели преследует составитель, бывают таблицы логарифмов чисел от 1 до 100, от 1 до 1000 и даже от 1 до 1 000 000. Те же таблицы позволяют по известному значению логарифма  $\sigma$  находить соответствующее число  $I$ , сводить (как это было показано выше) умножение к сложению, деление — к вычитанию, возведение в степень и извлечение корней — к умножению и делению.

На том же принципе, что и таблица логарифмов, основано действие и наиболее распространенной «вычислительной машины» — так называемой логарифмической линейки, изобретенной в 1630 г. Отредом. Устройство ее очень просто: это две линейки, скользящие одна по другой. На каждой из линеек нанесена шкала. Цифра 1, стоящая в начале шкалы, служит началом отсчета (логарифм 1 равен 0). Против деления, отстоящего на единичное расстояние от начала шкалы, стоит число 10. Вдвое дальше от 1 расположено деление с цифрой 100. Вообще числу  $n$  соответствует деление, отстоящее на расстояние, равное  $\log n$ , от начала отсчета. Если единицу одной шкалы мы совместим с отметкой  $a$  другой шкалы, то против числа  $b$  первой шкалы на другой шкале будет находиться отметка, соответствующая числу  $I$ . Это число  $I$  равно произведению чисел  $a$  и  $b$ . Действительно, отметка  $I$  отстоит от начала своей шкалы на расстояние  $\log I$ , а поскольку она находится против отметки  $b$  другой шкалы, то это расстояние равно  $\log a + \log b$ . Следовательно,  $\log I = \log a + \log b$ , откуда  $I = a \cdot b$ . Таким образом, логарифмическая линейка позволяет умножать и делить числа. На линейке длиной 25 см ошибка не

превышает  $1\frac{1}{2}\%$ , то есть вполне достаточна для большинства научных и практических целей.

Логарифмическая линейка позволяет без особого труда решать пропорции, поскольку при любом расположении подвижной и неподвижной шкал числа  $a_1, a_2, \dots, a_k$  одной шкалы стоят против чисел  $b_1, b_2, \dots, b_k$  другой шкалы лишь в том случае, если  $a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = \dots = a_k : b_k$ .

Остроумное и практичное, это вычислительное устройство свидетельствует о том, что при правильном подходе математика может существенно упростить процесс вычислений, а сравнительно позднее изобретение логарифмической линейки (XVII в.) — о том, что эра упрощения элементарных расчетов с помощью несложных устройств еще не закончилась.

Одну из первых математических таблиц составил еще Птолемей. В ней приводилась длина хорд окружности радиуса 1, стягивающих углы в  $1/2, 1, 1\frac{1}{2}, \dots, 90^\circ$ , причем с пятью десятичными знаками. Таблица Птолемея послужила основой для тригонометрических таблиц, используемых при решении треугольников.

Составление такой таблицы, какую вычислил Птолемей, было весьма трудной задачей и требовало обширных познаний в математике. Пользоваться же такой таблицей ныне умеют даже школьники. Математические таблицы самого различного назначения служат своего рода аккумуляторами труда математиков. Составление их связано с тщательной и кропотливой работой, но быстро окупается приносимой ими пользой. В наше время, когда таблицы можно размножать в тысячах экземпляров, достигаемая экономия становится еще значительней. Вот, например, как выглядит небольшой фрагмент пятизначной таблицы логарифмов:

$N$	$\log N$	$N$	$\log N$	$N$	$\log N$	$N$	$\log N$
51	1,70757	56	1,74819	76	1,88081	81	1,90849
52	71600	57	75587	77	88649	82	91381
53	72428	58	76343	78	89209	83	91908
54	73239	59	77085	79	89763	84	92428
55	74036	60	77815	80	90309	85	92942



Такие таблицы представляют собой не что иное, как «список» значений некоторой функции ( $\log x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ ), и для каждой функции можно составить «свою» таблицу. Например, можно было бы вычислить значения  $\sqrt{x}$  или  $x^2$  (и такие таблицы действительно существуют). Кроме того, составлены подробные таблицы функций, используемых в астрономии, теории вероятностей и т. д.

К другой группе таблиц относятся «списки» значений *эмпирических функций*. Примером таких таблиц могут служить записи температуры, производимые метеорологической станцией. Температура (измеряемая, например, в °C) — это эмпирическая (то есть полученная из опыта, а не вычисленная по какому-то математическому правилу) функция времени, то есть числа дней, прошедших с некоторой даты, например, с 1 января 1900 г.

Таблицы смертности, которыми пользуются страховые общества, также являются таблицами значений эмпирических функций. Эти таблицы показывают, какой процент людей умирает между  $i$ -м и  $(i + 1)$ -м годами жизни. При составлении этих таблиц возникают некоторые интересные математические задачи, например задача *выравнивания таблиц*. Если статистические данные о смертности населения говорят о том, что смертность, вообще говоря, тем больше, чем старше возраст, но имеется лишь одно исключение из правила: уровень смертности 67-летних выше, чем уровень смертности 68-летних, то это объясняют либо недостоверностью собранных статистических сведений, либо «бедностью» статистики (ее недостаточным объемом). Процент смертности 67-летних, выпадающий из общего правила, необходимо заменить другим (*выровнять его*), чтобы не нарушать общий ход зависимости уровня смертности от возраста. Сделать это нелегко, ибо выравнивая «из ряда вон выходящую» цифру, необходимо следить за тем, чтобы не слишком сильно «портить» собранные эмпирические данные.

Со времен Паскаля (1642 г.) известны вычислительные машины — специальные механизмы, существенно облегчающие действия, производимые над большими числами, или выполнение очень большого числа операций. Суммирующая машина (или машина для сложения)

устроена так, что после введения в нее слагаемых (вводить их можно нажатием соответствующих клавиш или любым другим способом) и поворота рукоятки привода, она вычисляет их сумму. Построить простейшую суммирующую машину совсем нетрудно. Возьмем обычное колесико, разделим его окружность на 10 равных частей и у каждой точки деления напишем по одной цифре, начав с 0 и идя по порядку до 9. Спрячем колесико за стенкой, в которой прорезано окошко (размеры окошка должны быть такими, чтобы сквозь него была видна лишь одна цифра). Предположим, что сначала в окошке стоит цифра 2. Повернув колесико на 3 деления (в сторону возрастания цифр), мы увидим в окошке цифру 5 — сумму чисел 2 и 3. Следовательно, наше колесико можно рассматривать, как простейшую суммирующую машину, а даже сложные машины действительно состоят из колес (только зубчатых — так называемых десятичных счетных колес). Если в окошке сначала стояла цифра 7, а мы повернули колесико на 5 делений, то сумма, найденная нашей «вычислительной машиной», окажется равной не 12, а лишь 2. Так произойдет потому, что в нашей машине не предусмотрен *перенос единицы в старший разряд*. Однако если слева от нашего колесика мы поместим еще одно, такое же, поставив его сначала на 0 и сделав так, чтобы оно поворачивалось ровно на одно деление всякий раз, когда первое колесо проходит девятку, то, сложив на первом колесе  $7 + 5$ , мы получили бы в левом окошке 1, а в правом 2, то есть число 12. Привести в движение колесо десятков можно, например, поместив на колесе единиц специальный штифт.

Ясно, что если мы захотим сконструировать машину, способную суммировать многозначные числа, то нам понадобится целая система колес и, кроме того, еще одна система для второго слагаемого. Действительно, предположим, что к некоторому числу мы хотим прибавить 123. Не будь системы колес для второго слагаемого, нам бы пришлось своей рукой поворачивать колесо единиц на 3 деления, колесо десятков — на два деления и колесо сотен — на одно деление. Ясно, что от такой машины вряд ли была бы особая польза.

Нетрудно представить также, с какими трудностями встречается конструктор суммирующих машин. Каждое

счетное колесо, проходя девятку, поворачивает соседнее колесо слева на одно деление. При вычислении суммы  $99\,999 + 1$  сопротивление станет столь большим, что выдержать возникающие нагрузки сможет лишь очень прочная конструкция. Кроме того, необходимы особые устройства, которые позволили бы «стирать» ненужные результаты и ставить машину на 0, а если нам понадобится сложить не два, а много слагаемых, то трудности возрастут еще более. Существуют устройства, позволяющие машине запоминать слагаемые, частичные и полные суммы и т. д.

Около 1814 г. широкой известностью пользовались машины А. Штерна из Варшавы, позволявшие не только вычислять суммы, но и извлекать корни из чисел. В 1861 г. появились первые клавишные машины для сложения.

В 1888 г. Л. Болле сконструировал вычислительную машину для прямого умножения чисел. (До него для умножения чисел использовали суммирующие машины, заменяющие умножение многократно повторяемым сложением.) В наше время существует много различных типов машин для умножения.

И машины для сложения и умножения, и тем более современные вычислительные машины сильно ускорили развитие прикладных наук и позволили решать задачи, которые без них выходили за пределы человеческих возможностей. Но те же вычислительные машины наводят и на некоторые размышления, имеющие самое непосредственное отношение к интересующему нас предмету. Дело в том, что иногда высказывают мнение, будто математика относится к числу низших видов умственной деятельности, поскольку «вычислительные машины успешно справляются с обязанностями математиков». Вряд ли нужно говорить, что подобное мнение глубоко ошибочно.

Машина «приступает» к решению математической задачи лишь тогда, когда та уже не представляет интереса для так называемой чистой математики. Пока не идет об определении сложения, о доказательстве переместительного или сочетательного закона, машина безмолвствует. Она не учит нас, как записывать натуральные числа в десятичной системе счисления, и не доказывает, что любое число  $n$  можно представить в десятичной

системе одним и только одним способом. Однако когда все это уже доказано и мы знаем, как производить сложение в десятичной системе, тогда машина действительно избавляет человеческий мозг от низшей формы деятельности (от необходимости производить сложение или умножение). Тех, кто полагает, будто вычислительная машина способна заменить математика, можно было бы сравнить с теми, кто считает, что скорострельный карабин заменяет начальника штаба, а словарь рифм — поэтов. Подобно тому как стратегия не сводится к стрельбе из самого скорострельного оружия, а поэзия — к подбору рифм, математика отнюдь не является искусством безошибочно производить арифметические действия. Зато изобретение Паскалем суммирующей машины — прекрасный пример того, что может сделать математик. Это изобретение имело не меньшее значение, чем изобретение логарифмов Непером. Мы умышленно упомянули эти два достижения математиков именно потому, что вскоре после того, как Паскаль совершил свое открытие, между сторонниками логарифмов и сторонниками вычислительных машин разыгралась настоящая битва.

Логарифмы привели к тому, что умножение и деление стали более легкими операциями, чем сложение и вычитание. Со времен изобретения логарифмов в вычислительной математике появилась тенденция приводить все выражения к виду, удобному для логарифмирования, то есть по возможности избегать суммирования или вычитания степеней, произведений или тригонометрических функций. После появления вычислительных машин, во много раз облегчивших выполнение операций сложения и вычитания, необходимость приведения к удобному для логарифмирования виду отпала.

Новейшие вычислительные машины позволяют производить весьма сложные вычисления, определять истинность и ложность некоторых математических утверждений и даже отыскивать доказательства и находить новые теоремы. Однако и они не заменят математиков, как не заменила художников фотографическая камера, а лишь, освободив математиков от ряда более простых задач, позволяют им обратиться к более глубоким проблемам, недоступным «машинизации».

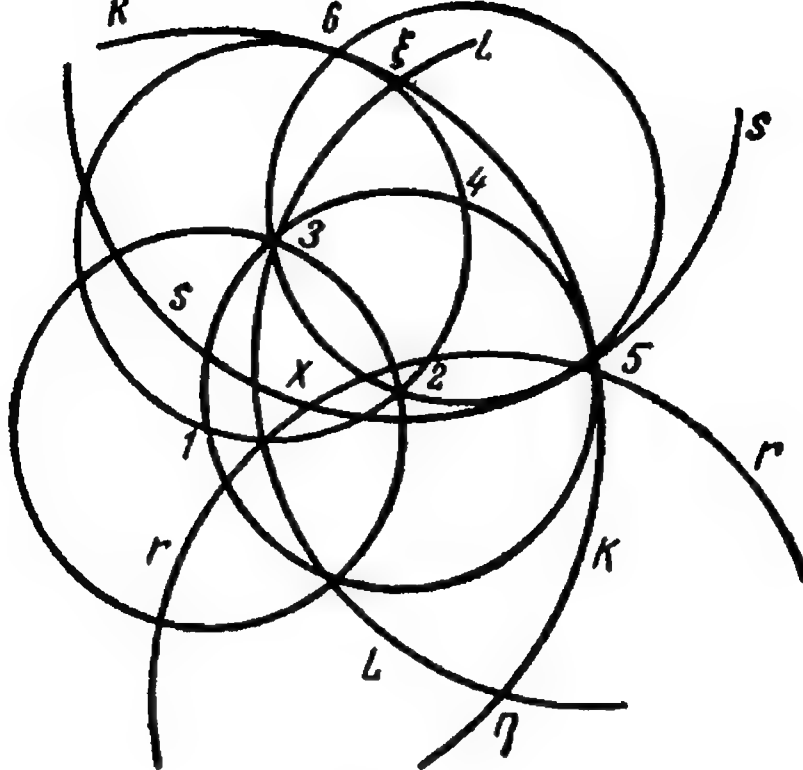


Рис. 13.

В области геометрии некоторые механические устройства появились очень давно. К числу простейших из них относятся линейка, транспортир и циркуль. Во времена Наполеона вышла в свет книга итальянского математика Маскерони, в которой было показано, как решать геометрические задачи на построение без линейки, с помощью одного лишь циркуля.

На рис. 13 показано, как с помощью циркуля найти середину отрезка, концы которого  $A$  и  $B$  заданы\*.

Усовершенствованным циркулем можно считать шарнирные механизмы, то есть механизмы, состоящие из стержней, соединенных между собой так, что они могут вращаться вокруг некоторых точек. Знаменитая задача о построении шарнирного механизма, который мог бы вычерчивать прямую, возникла в связи с изобретением паровой машины Уатта. Этот механизм должен был бы заменить кулису, приводящую в движение шток поршня.

---

\* Обозначим точку  $A$  цифрой 1, а точку  $B$  — цифрой 2. Проведем окружности радиуса  $[1, 2]$  с центрами в точках 1 и 2. Затем, не меняя раствора циркуля, проведем еще две окружности — с центрами в точках 3 и 4. В результате мы получим точки 5 и 6. Из точки 5 радиусом  $[5, 3]$  проведем дугу  $L$ , из точки 1 радиусом  $[1, 5]$  — дугу  $K$ . Дуги  $K$  и  $L$  пересекаются в точках  $\xi$  и  $\eta$ . Проведем окружности  $r$  и  $s$  радиусом  $[\xi, 5]$  с центрами в точках  $\xi$  и  $\eta$ . Эти окружности пересекаются в точке  $x$ , которая и является серединой отрезка  $[1, 2]$ .

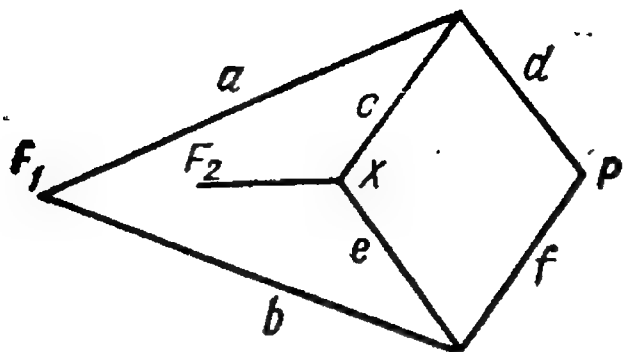


Рис. 14.

В усовершенствованной модели шарнирный механизм воспроизводит прямую лишь приближенно. Точное решение дает инверсор Поселье (рис. 14). Точка  $P$  этого механизма описывает прямую и только прямую\*.

Доказано, что любую алгебраическую кривую, то есть кривую, аналитическое выражение которой имеет вид многочлена относительно  $x$  и  $y$ , можно начертить, построив соответствующий шарнирный механизм. Особенно многочисленным оказалось семейство эллипсографов, то есть шарнирных механизмов для вычерчивания эллипса.

Среди первых вычислительных машин были и машины, предназначенные для составления таблиц. В разделе 7 мы уже говорили о понятии функции. Чтобы это понятие можно было использовать в прикладной математике, необходимо научиться вычислять значения функции в точках, отстоящих одна от другой на достаточно малое расстояние. Предположим, например, что нам понадобилась таблица значений функции  $x^2$  для  $x$ , начиная с 0, через каждые 0,1 (или, как принято говорить, с шагом 0,1). Вычислив нужные нам значения, получим

$x$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	...
$x^2$	0	0,01	0,04	0,09	0,16	...

Вычитая из последующего значения функции  $x^2$  (начиная со второго) ее предыдущее значение, получаем так называемые первые разности

$$+0,01, +0,03, +0,05, +0,07, \dots$$

Повторяя эту операцию еще раз, то есть вычисляя разности разностей, находим вторые разности

$$+0,02, +0,02, +0,02, \dots$$

---

\* Длины стержней в инверсоре Поселье подобраны так, что  $a = b, c = d = e = f$ . Точки  $F_1$  и  $F_2$  закреплены неподвижно. Все стержни соединены друг с другом шарнирно. Кроме того,  $F_1F_2 = F_2X$ .



Мы видим, что вторые разности постоянны: они все равны 0,02.

Желая составить таблицу значений функции  $x^2$  при  $x = 0; 0,1; 0,2; \dots$ , мы можем действовать в обратном порядке: сначала выписать вторые разности, затем прибавить к ним по 0,01 и еще раз просуммировать полученные числа по схеме

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & 0,02 & 0,02 & 0,02 & 0,02 & 0,02 & 0,02 & \dots \\
 0,01 & + & / & + & / & + & / & + & / & + & / \\
 | & & & & & & & & & & \\
 0,01 & 0,03 & 0,05 & 0,07 & 0,09 & 0,11 & 0,13 & \dots \\
 | & + & / & + & / & + & / & + & / & + & / \\
 0,01 & 0,04 & 0,09 & 0,16 & 0,25 & 0,36 & 0,49 & \dots
 \end{array}$$

Поскольку при таком способе вычислений каждый раз производятся однотипные операции, он особенно удобен для машинного составления таблиц. Идею создания разностной вычислительной машины высказал в 1796 г. военный инженер Г. Мюллер, но лишь в 1812 г. Бэббедж, подхватив эту мысль, построил вычислительную машину для суммирования первых и вторых разностей. Г. и Э. Шейтцы из Стокгольма построили в 1853 г. машину для суммирования четвертых разностей, позволяющую вычислять значения многочленов пятого порядка. Машина шведских изобретателей состояла из зубчатых колес, образующих пять ярусов. Один ярус соответствовал значениям самой функции и четыре — разностям от первого до четвертого порядков. Машина позволяла не только вычислять значения функции с 8 десятичными знаками, но и получать свинцовую матрицу, что при печатании таблиц исключало ошибки вычислителя, переписчика и наборщика. Первая машина Шейтцев была использована при составлении таблицы логарифмов обсерваторий в Дадли (США). По своим размерам она лишь немного меньше пианино.

Существуют также машины для решения алгебраических выражений. Первые вычислительные машины такого типа для решения кубического уравнения были построены еще в древности. Их авторами, по-видимому, были Платон и Эратосфен. Прообразом современных универсальных вычислительных машин стала «аналитическая машина» Ч. Бэббеджа, предназначенная для про-



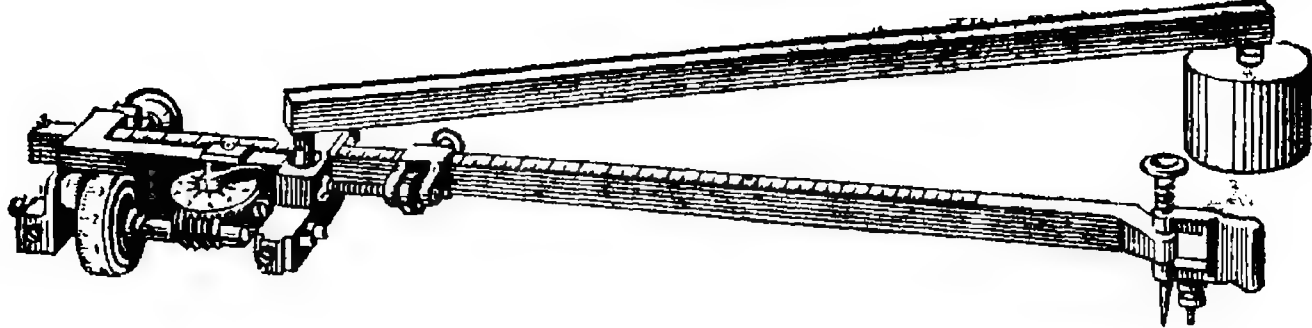


Рис. 15.

извольных арифметических операций над произвольными числами и выдачи результатов на печать. Недостаток средств, а затем и смерть не позволили изобретателю закончить создание машины.

К вычислительным машинам относятся также планиметры и интегрометры, то есть устройства, позволяющие вычислять площадь фигуры, ограниченной данной кривой, или интегрировать функцию, заданную своим графиком. Вид так называемого полярного планиметра показан на рис. 15.

Широкой известностью пользовались интегрометры и интеграфы Абданк-Абакановича.

Популярность графических методов вычислительной математики сильно возросла после того, как французский математик Окань изобрел *номографию*.

Правда, элементарные графические методы были распространены и раньше. Предположим, например, что необходимо вычислить расстояние от точек  $A$  и  $B$  до удаленной от них точки  $O$ . В этом случае ответ быстрее всего можно получить, измерив на местности с помощью рулетки длину базиса  $AB$  и углы  $BAO$  и  $ABO$ , а затем построив на листке бумаги (рис. 16) соответствующим образом уменьшенный отрезок  $AB$  (например, взяв вместо 300 м отрезок 30 мм) и углы, равные измеренным. Полученный треугольник  $AOB$  подобен «натурному» треугольнику на местности. Измерив длину отрезка  $AO$

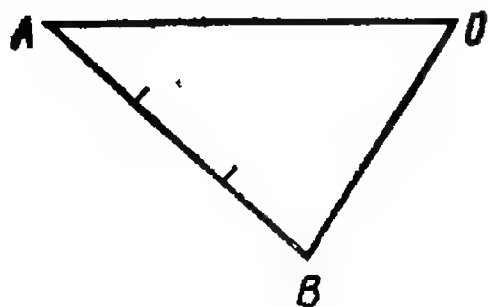


Рис. 16.

на бумаге и обнаружив, что  $AO = 24,5$  мм, мы найдем расстояние между точками  $A$  и  $O$ : оно будет равно 245 м. В рассмотренном нами случае графический метод подсказан самой задачей, но обычно геометрическое построение, дающее решение задачи, сначала необходимо найти.

Предположим, что мы хотим разработать графический метод вычисления объема идеального газа при постоянном давлении. Как известно, объем  $v$  при этих условиях определяется выражением

$$v = v_0 \left( 1 + \frac{t}{273} \right),$$

где  $v_0$  обозначает объем, занимаемый газом при  $0^\circ\text{C}$ , а  $t$  — температуру ( $^\circ\text{C}$ ). То же выражение можно представить в виде

$$\frac{v}{v_0} = 1 + \frac{t}{273} = \frac{273 + t}{273}.$$

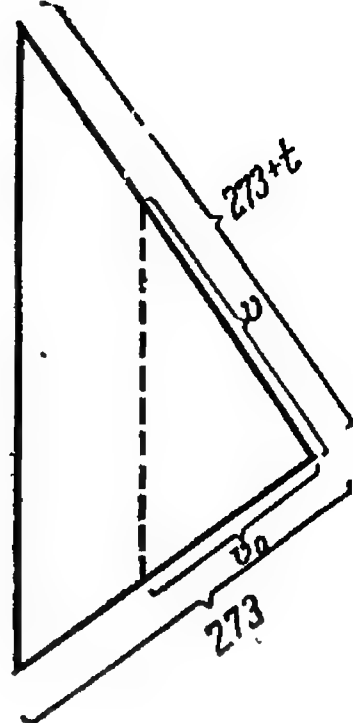


Рис. 17.

Рассмотрим прямоугольный треугольник (рис. 17) с катетами  $v$  и  $v_0$ . Он подобен прямоугольному треугольнику с катетами, равными  $273 + t$  и  $273$ . Чтобы величину интересующего нас объема можно было считать прямо с чертежа, необходимо ввести соответствующую шкалу. Для этого от точки  $S$  (рис. 18) влево по горизонтали и вправо по вертикали отложим 273 раза по  $\frac{1}{2}$  мм (то есть отрезки по 13,5 см). Конечные точки отрезков обозначим  $A$  и  $B$ . От точки  $B$  вверх построим шкалу температур ( $\frac{1}{2}$  мм соответствует  $1^\circ\text{C}$ ), разместив ее справа от вертикали. Слева от той же вертикали построим шкалу объемом  $v$  с началом в точке  $S$ . Масштаб для этой шкалы можно выбирать произвольно, например, считать, что 1 см соответствует  $1 \text{ м}^3$ . Аналогичную шкалу для  $v_0$  построим на  $SA$  от точки  $S$  влево.

Предположим, что мы хотим узнать, какой объем будет занимать при температуре  $10^\circ\text{C}$  водород (его в достаточно хорошем приближении можно считать идеальным газом), имевший при  $0^\circ\text{C}$  объем  $5 \text{ м}^3$ . Соединив точку  $A$  с интересующей нас точкой  $P$  ( $10^\circ\text{C}$ ) на шкале температур, проведем через отметку 5 на шкале  $AS$  (начальных объемов) прямую, параллельную прямой  $AP$ . Отметка у точки пересечения  $Q$  этой прямой со шкалой  $SB$  объемов  $v$  покажет, какой объем будет занимать водород при  $10^\circ\text{C}$ . Ясно, что вычерчивание шкал — работа более кропотливая, чем, например, построение треугольника, зато метод «читающих чертежей» — номограмм —

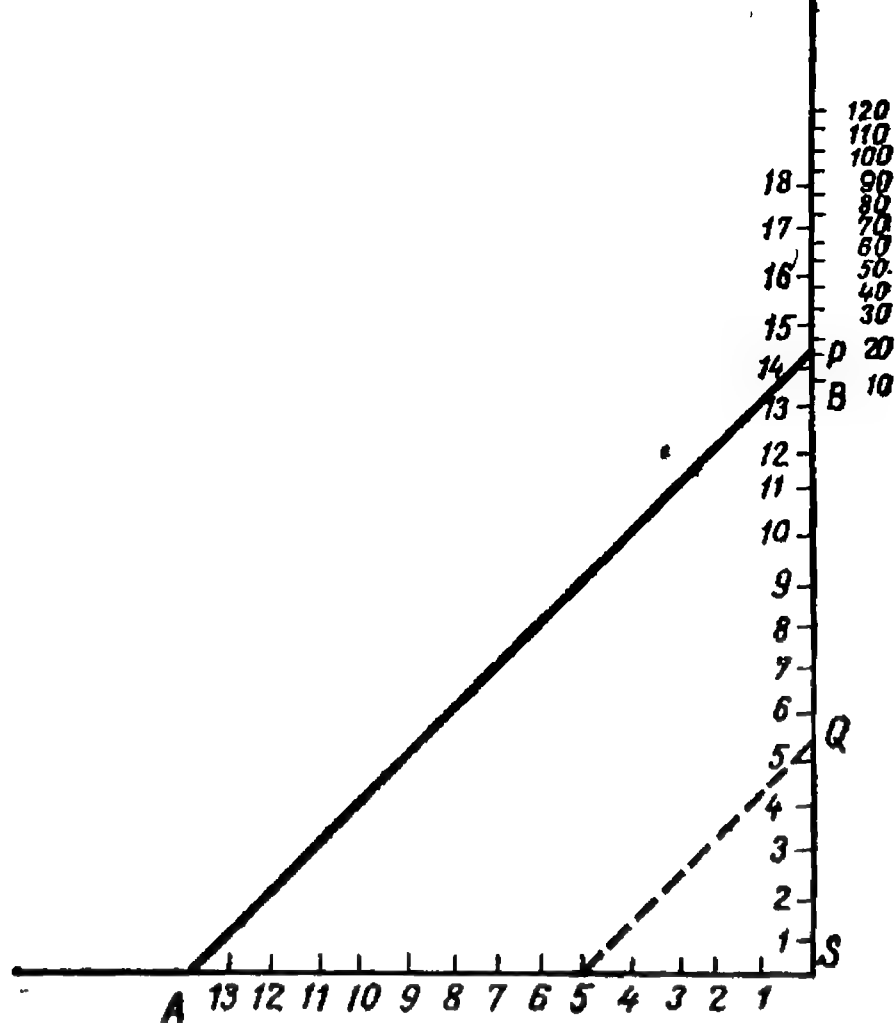


Рис. 18.

обладает и известными преимуществами. При определении расстояния от точек  $A$  и  $B$  до точки  $O$  мы каждый раз должны были бы строить новый треугольник. В номограмме для определения объема идеального газа при постоянном давлении построенные шкалы остаются пригодными всегда, и лишь две параллельные прямые каждый раз придется проводить заново. Обращает на себя внимание еще одно преимущество этой номограммы: она позволяет находить *любую* из трех величин  $v$ ,  $v_0$ ,  $t$ , если две другие величины известны.

Все примитивные графические методы, о которых мы говорили до сих пор, уступили место методу *коллинеарных точек*, изобретение которого наряду с введением понятия *функциональной* шкалы составляет заслугу создателя номографии Оканя.

Что же такое номография? Это наука о графическом представлении функциональных зависимостей. Чтобы разобраться, в чем состоит метод номографии, необходимо ввести понятие функциональной шкалы. Обычную шкалу строят так. На прямой на равных расстояниях одно

от другого ставят деления, соответствующие равноотстоящим значениям какой-то переменной. Например, отложив на прямой от некоторой точки  $O$  отрезки длиной 1, 2, 3, 4, ... единиц, можно поставить возле полученных делений числа 0,1; 0,2; 0,3; 0,4 и т. д. (рис. 19).

Функциональная шкала для функции  $f(x)$  основана на том, что расстояние вдоль прямой от точки  $O$  измеряется в «единицах»  $f(x)$ . Иначе говоря, отмерив от точки  $O$  отрезок длиной  $f(x)$  единиц, мы должны поставить у полученного деления отметку  $x$ , а не  $f(x)$ . Например, функциональную шкалу для функции  $y = x^2$  (рис. 20) мы получаем, откладывая от точки  $O$  отрезки в  $x^2$  мм и ставя около их правых концов отметки, соответствующие числу  $x$ . Отметки у делений, отстоящих от начала квадратичной шкалы на расстоянии 2, 3, ... мм, в десятичной системе можно записать лишь округленно: 1,41 — вместо  $\sqrt{2}$ , 1,73 — вместо  $\sqrt{3}$  и т. д. Чтобы деления шкалы были «круглыми» числами, мы должны поставить обратную задачу: на какое расстояние отстоят друг от друга деления, соответствующие числам 1,1; 1,2 и т. д.? Ясно, что отметка 1,1 должна находиться от начала шкалы на расстоянии 1,21 мм, отметка 1,2 — на расстоянии 1,44 мм и т. д. Прделав эту операцию с достаточно мощным набором «круглых» чисел, например, для всех чисел от 0 до некоторого числа с шагом 0,1 мы получим сравнительно густую сеть делений. Ясно, что наша шкала не будет равномерной: ведь это шкала квадратичной функции  $y = x^2$  (рис. 21).



Рис. 19.



Рис. 20.

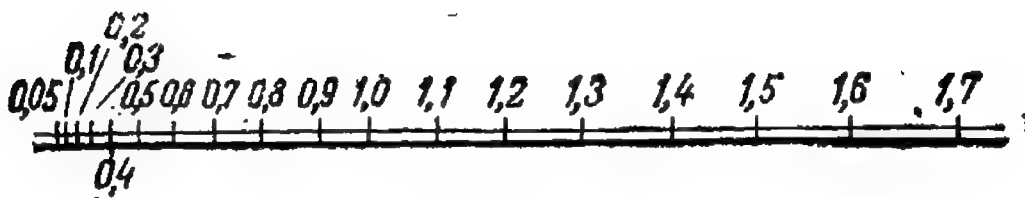


Рис. 21.

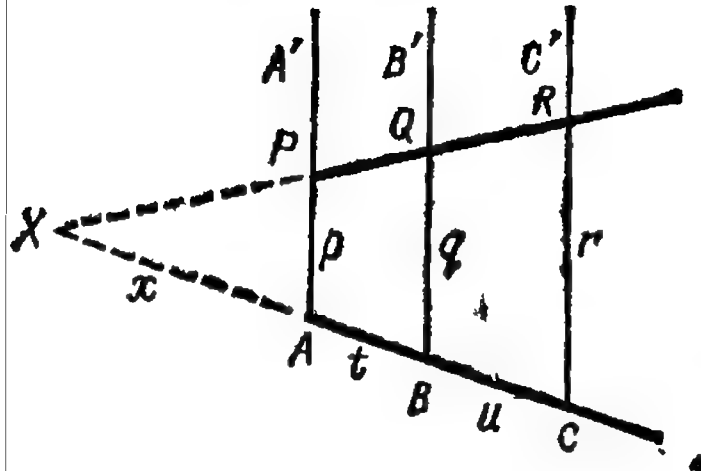


Рис. 22.

Разумеется, другим функциям соответствуют другие функциональные шкалы. С логарифмической шкалой мы познакомились еще раньше, когда говорили об устройстве логарифмической линейки.

Обратимся теперь к понятию коллинеарных точек. Так в номографии

называют точки, лежащие на различных шкалах, но на одной и той же прямой.

Рассмотрим, например, три параллельные прямые  $AA'$ ,  $BB'$  и  $CC'$  (рис. 22). Пусть  $ABC$  — прямая, пересекающая их так, что  $AB = t$ ,  $BC = u$ .

При каком условии три точки  $P$ ,  $Q$  и  $R$ , лежащие на трех параллельных прямых  $AA'$ ,  $BB'$  и  $CC'$ , будут коллинеарными? Условие это нетрудно найти из подобия треугольников  $APX$ ,  $BQX$  и  $CRX$ . Обозначив  $AP = p$ ,  $BQ = q$ ,  $CR = r$  и  $AX = x$ , получим

$$x : p = (x + t) : q = (x + t + u) : r.$$

Следовательно,

$$(x + t) : x = q : p, \quad (x + t + u) : (x + t) = r : q,$$

или

$$t : x = (q - p) : p, \quad u : (x + t) = (r - q) : q,$$

откуда

$$x = \frac{pt}{q - p}, \quad x + t = \frac{uq}{r - q}$$

и, далее,

$$t : (x + t) = (q - p) : q, \quad u : (x + t) = (r - q) : q.$$

Отсюда находим:

$$\frac{t}{q - p} = \frac{u}{r - q},$$

$$tr - tq = uq - up,$$

$$q = \frac{tr + up}{t + u}.$$

Предположим теперь, что на прямых  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  мы отложили функциональные шкалы следующих функ-

ций:  $\log f(x)$ ,  $\log g(y)$  и  $\log h(z)$ . Если у отметок  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  стоят числа  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , то расстояния  $p$ ,  $q$ ,  $r$  равны  $\log f(x)$ ,  $\log g(y)$ ,  $\log h(z)$ , и, следовательно, из выведенного ранее выражения для  $q$  мы получаем

$$\log g(y) = \frac{t \log h(z) + u \log f(x)}{t + u},$$

или

$$(t + u) \log g(y) = t \log h(z) + u \log f(x),$$

откуда

$$(g(y))^{(t+u)} = (h(z))^t \cdot (f(x))^u.$$

Например, полагая  $t = 1/2$ ,  $u = 1/2$ ,  $g(y) = \sqrt[3]{1+y}$ ,  $h(z) = z^2$ ,  $f(x) = x$ , находим

$$\sqrt[3]{1+y} = z \sqrt{x}.$$

Числа  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , стоящие у коллинеарных точек  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  в рассмотренном нами примере, удовлетворяют специальному соотношению  $\sqrt[3]{1+y} = z \sqrt{x}$ . Зная значение  $x$  и  $y$ , достаточно провести через соответствующие деления шкал  $x$  и  $y$  прямую, чтобы по отметке у точки пересечения этой прямой со шкалой  $CC'$  найти искомое значение  $z$ . В этом и состоит метод номографии Оканя (примененный к рассмотренному нами частному случаю). Введение большого числа шкал, причем шкал не только прямолинейных, но и криволинейных, еще больше расширяет возможности этого метода, находящего применение в различных областях современной техники.

Составить номограмму — значит построить функциональную шкалу. Это очень трудоемкая, но одноразовая работа, и после того, как она выполнена, для решения конкретной задачи достаточно приложить к построенным шкалам линейку или натянутую нить, чтобы тотчас же прочесть готовый ответ. Разумеется, работу по составлению номограмм следует считать оправданной

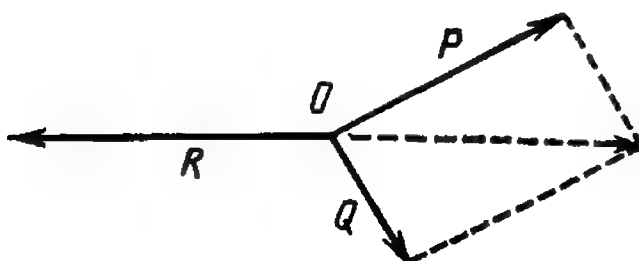


Рис. 23.

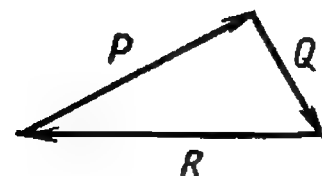


Рис. 24.

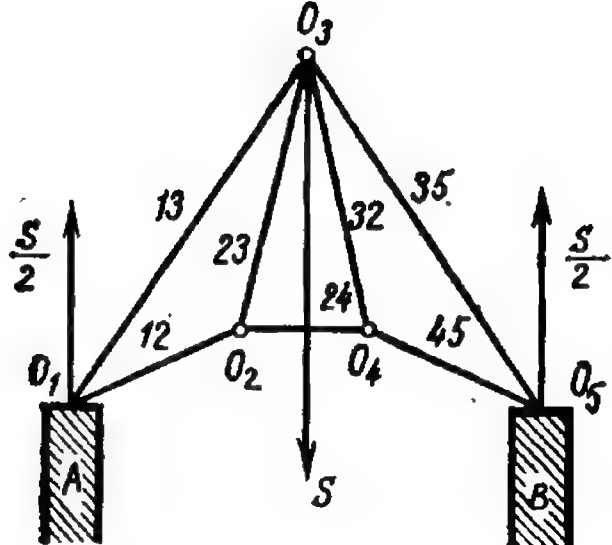


Рис. 25.

лишь тогда, когда необходимости практики требуют частого решения одной и той же функциональной зависимости. Например, при прокладке водопроводной сети приходится неоднократно вычислять диаметры труб при различных допустимых давлениях и требуемом расходе воды, то есть по существу находить величины, связанные одним и тем же соотношением.

Еще старше номографии *графостатика*, основы которой заложили Кремона и Максвелл. В единую систему методы графостатики свел Кульман. Графостатика — это графический метод вычисления напряжений в строительных конструкциях, главным образом в стержневых системах. По правилу параллелограмма силы  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ , приложенные к точке  $O$ , находятся в равновесии, если сила  $R$  совпадает по величине с диагональю параллелограмма, построенного на силах  $P$  и  $Q$ , и противоположна диагонали по направлению (рис. 23). Следовательно, если мы отложим один за другим направленные отрезки (векторы)  $P$ ,  $Q$  и  $R$  так, чтобы отрезок  $Q$  начинался в той точке, где заканчивается отрезок  $P$ , а  $R$  — там, где заканчивается  $Q$ , то конец отрезка  $R$  совпадет с началом отрезка  $P$  и мы получим замкнутый треугольник (рис. 24). В этом и заключается основная идея графостатики.

Предположим теперь, что мы имеем некую стержневую систему (рис. 25), к верхней точке которой приложена сосредоточенная нагрузка  $S$ . Из статики известно, что на точки системы, покоящиеся на опорах  $A$  и  $B$ , действуют силы реакции, каждая из которых равна  $S/2$ , причем их направление противоположно направлению силы  $S$ . Чтобы вычислить силы, действующие на каждый узел конструкции  $O_1$ ,  $O_2$ ,  $O_3$ ,  $O_4$ ,  $O_5$ , будем считать, что силы, действующие на каждый узел, направлены вдоль стержней, сходящихся в данном узле, и уравнивают друг друга. В этом случае каждый узел можно рассматривать так же, как ранее мы рассматривали точку  $O$ ,



то есть заменить узел замкнутым треугольником, стороны которого равны действующим на узел силам. Направления сил совпадают с направлениями сходящихся в данном узле стержней, ибо силы действуют вдоль стержней. Узел  $O_1$  дает треугольник *I* (рис. 26).

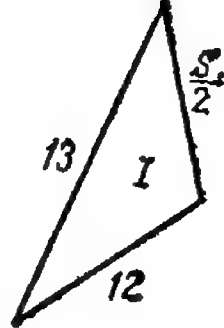


Рис. 26.

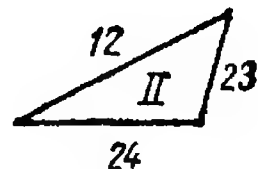


Рис. 27.

Его мы можем построить, поскольку одна сторона  $(S/2)$  нам известна, а две другие параллельны стержням  $O_1O_2$  и  $O_1O_3$ . Из треугольника *I* мы найдем силу 12, действующую вдоль стержня  $O_1O_2$ , что позволит построить треугольник *II* (рис. 27), с помощью которого найдем силы, приложенные к узлу  $O_2$ . Выглядит этот треугольник следующим образом (рис. 28). Стрелка 12 в треугольнике *II* имеет ту же длину, но противоположное направление по сравнению со стрелкой 12 в треугольнике *I*. Действительно, в треугольнике *I* стержень  $O_1O_2$  «тянет» точку  $O_1$  так же, как точку  $O_2$  в треугольнике *II*, но (по III закону Ньютона) в противоположном направлении. Сложим теперь треугольники *I* и *II* в одну фигуру и, дополнив ее симметричными фигурами *IV* и *V*, получим так называемый *обратный многоугольник Кремоны*, соответ-

ствующий нашей стержневой системе. Каждому узлу конструкции отвечает «свой» треугольник, длины сторон которого пропорциональны усилиям, действующим на узел со стороны стержней. Лишь узлу  $O_3$  соответствует пятиугольник с пересекающимися сторонами. Стрелки в треугольниках направлены против часовой стрелки, а в пятиугольнике, соответствующем вершине, — по часовой стрелке. (При проведении практических расчетов верхнюю часть диаграммы можно отбросить, поскольку она симметрична нижней \*.)

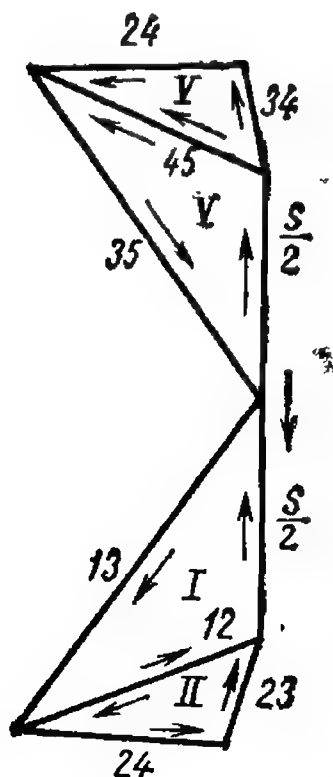


Рис. 28.

\* Стрелка 24 на рис. 28 показана дважды: вверху и внизу. Этого можно было бы избежать, если ертовать наглядностью схемы.

*Начертательная геометрия*, берущая свое начало в работах Монжа (1847 г.), старше графостатики. Ее цель состоит в том, чтобы научиться изображать на плоскости относительное расположение тел в пространстве. Для решения этой задачи начертательная геометрия использует метод проекций. Каждую точку пространства она проецирует на две выбранные раз и навсегда плоскости: горизонтальную и вертикальную (спроецировать точку на плоскость означает опустить из точки перпендикуляр на плоскость и вместо самой точки рассматривать основание этого перпендикуляра). В результате каждая точка  $P$  получает две проекции:  $O$  — на горизонтальную плоскость и  $O'$  — на вертикальную плоскость (рис. 29). Плоскости проекций пересекаются по некоторой прямой — так называемой оси. Поворачивая вертикальную плоскость вокруг оси (как бы закрывая книгу), мы можем совместить ее с горизонтальной плоскостью. Проекции  $O$  и  $O'$  точки  $P$  займут при этом такое положение, что отрезок  $OO'$  будет перпендикулярен оси. Зная обе проекции, нетрудно (обратным ходом) восстановить точку  $P$ .

Задачи пространственной геометрии можно решать с помощью чертежа, на плоскости, следующим образом. Предположим, что требуется провести прямую, проходящую через две данные точки  $P_1$  и  $P_2$  (рис. 30). На языке начертательной геометрии это означает, что известны проекции точек  $P_1$  и  $P_2$ , а требуется найти проекции проходящей через них прямой. Пусть  $O_1$  и  $O'_1$  — проекции одной, а  $O_2$  и  $O'_2$  — другой точки. Если искомая прямая проходит через точки  $P_1$  и  $P_2$ , то ее проекция на вертикальную плоскость должна проходить через проекции  $O'_1$  и  $O'_2$  точек  $P_1$  и  $P_2$  на вертикальную плоскость,

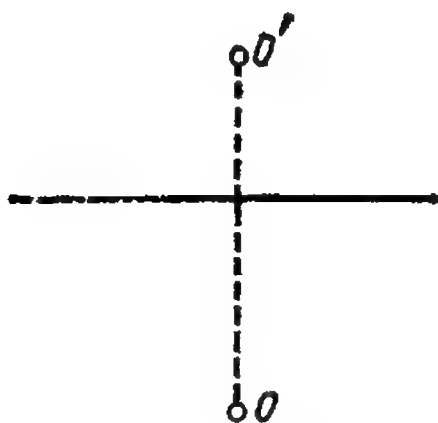


Рис. 29.

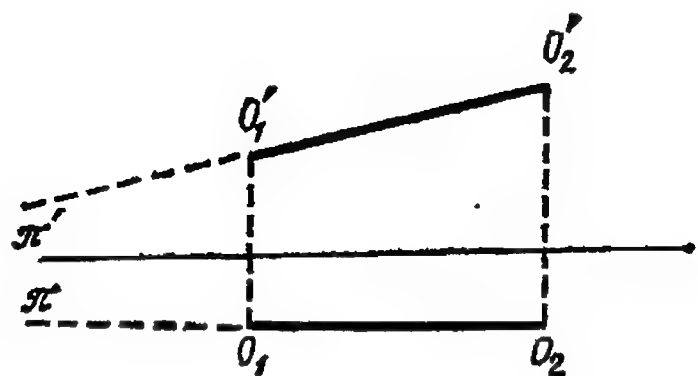


Рис. 30.

а проекция на горизонтальную плоскость — через проекции  $O_1$  и  $O_2$  точек  $P_1$  и  $P_2$  на горизонтальную плоскость. Следовательно, проведя прямую через точки  $O'_1$  и  $O'_2$ , получим проекцию  $\pi'$  искомой прямой на вертикальную плоскость, а проведя прямую через точки  $O_1$  и  $O_2$  — ее проекцию  $\pi$  на горизонтальную плоскость. Значит, задачу можно считать решенной.

Разумеется, приведенный пример дает лишь слабое представление о тех важных и нужных задачах, решением которых занимается начертательная геометрия. Разработанные ею методы позволяют строить проекции пространственных тел, находить сечения кривых поверхностей и т. д., удовлетворять разнообразные запросы строительной механики, машиностроения и других прикладных областей науки и техники. С методом проекций тесно связана наука о перспективе и некоторые «родственные» геометрические дисциплины, что делает начертательную геометрию особо важным разделом прикладной математики. В ряде высших технических учебных заведений открыты даже специальные кафедры начертательной геометрии. И тем не менее начертательная геометрия не имеет большого будущего и возлагать надежд на ее бурное развитие нельзя. Как раздел геометрии она целиком входит в синтетическую геометрию, а каждая из прикладных областей обычно пользуется своим методом, особенно подходящим для тех задач, которыми занимается данная область (например, номография, графостатика). Внимание, уделяемое начертательной геометрии в высшей технической школе, лишь отчасти оправдано практическими потребностями и определяется в основном традицией.

Итак, к какому же выводу мы пришли?

Там, где речь идет о практическом применении теоретических результатов, проведении расчетов или использовании формул, выведенных с помощью чисто логических рассуждений, можно и должно применять особые математические методы (нередко совершенно неправильно называемые методами прикладной математики). Иногда эти методы оказываются столь важными, что их выделяют в особые разделы и даже в отдельные математические дисциплины. Если речь идет о проведении расчетов, то математика не подведет. Не следует лишь думать, будто чистая математика ставит себе

целью проведение всевозможных расчетов. Мы видим, что для этого существуют таблицы, вычислительные машины, диаграммы и механизмы, устройство которых весьма сложно. В этой области возможен прогресс. Здесь нас ожидают множество интересных и трудных задач. Например, можно ли сконструировать машину, которая находила бы доказательства утверждений определенного типа? Можно ли построить машину, способную решать бесконечно много задач? Даже постановка подобных задач наталкивается на большие трудности, связанные хотя бы с тем, что само понятие машины требует строгого определения.

Важно также подчеркнуть красоту и научную значимость некоторых методов (например, графостатики). Они наводят на мысль, что есть много других задач механики и физики, которые также можно было бы решать графическими методами, если бы... эти методы существовали. Разработка таких методов — увлекательная задача для математиков, уверенных в своих силах.

## VII. ОШИБКИ В МАТЕМАТИКЕ

*Непогрешимость математики. — Классификация ошибок. — Анекдот де Моргана. — Ошибка Монтейля. — Ошибка Даламбера. — Поиск ошибок. — Опасности, талящиеся в символике.*

Часто можно слышать: «Верно, как дважды два — четыре». Те, кто так говорит, разделяют широко распространенное убеждение в непогрешимости математики. Возражать против мнения о том, что математические умозаключения являются незыблемыми истинами, было бы трудно. Действительно, утверждения, выводимые из аксиом и постулатов путем математических рассуждений, безусловно заслуживают почетного названия научных истин. Сомневаться в этом трудно даже тогда, когда ничего не понимаешь в математических рассуждениях. Однако сейчас речь пойдет об утверждениях лишь кажущихся, но отнюдь не являющихся математическими, пробравшихся в здание науки окольными путями, обманувших бдительность ученых. Мы имеем в виду ошибочные утверждения, не заслуживающие никакого почтения. Разумеется, математики могли бы присматривать и за боковыми входами в храм науки, если бы этих входов не было так много. Ошибочным утверждениям не раз удавалось незаметно пробираться в него, и разоблачить их стоило намалых трудов.

В математической литературе ошибки встречаются в изобилии. Один из выдающихся современных математи-

ков выразил мнение о том, что половина утверждений, публикуемых в многочисленных специальных математических журналах, ошибочна. Быть может, его оценка пессимистична. Однако неоспоримо установлено, что существуют докторские диссертации, ошибочные от первого до последнего утверждения. Пуанкаре как-то сказал, что всякий, кому доводилось проверять экзаменационные работы, знает, сколько труда затрачивает кандидат, чтобы доказать первое ошибочное утверждение, из которого затем он с удивительной легкостью выводит как истинные, так и ложные заключения. На первый взгляд может показаться, будто последствия даже одной ошибки ощутимы во всех уголках здания науки и что поэтому ошибки небезопасны, но легко обнаруживаемы. В действительности же дело обстоит иначе: ошибки локализованы. Наука идет своей дорогой, а ошибочное утверждение ожидает своей участи. Позднее мы попытаемся объяснить, почему так происходит.

Ошибки возникают от того, что авторы математических работ от спешки, невнимательности или по каким-то другим причинам сбиваются с истинного (то есть математического) пути.

Простейшим примером может служить вычислительная ошибка. Уже на этом примере мы видим, что ошибка не обязательно связана с ошибкой в исходных предположениях. Кто-то, складывая длинные столбцы цифр, ошибся и не стал особенно вдаваться в смысл полученного результата, из которого следовало, что дважды два пять. Психология того, кто совершает ошибку, нас сейчас не интересует. Мы хотим пока лишь построить классификацию ошибок. Тот же самый вычислитель, который ошибся при сложении, не доверяя более себе, захочет воспользоваться при умножении таблицами и вполне может снова ошибиться, на этот раз из-за опечатки в таблицах. Ясно, что вторая его ошибка существенно отличается от первой.

Условимся для удобства, отнюдь не претендуя на исчерпывающую классификацию, различать ошибки, кроющиеся в самом доказательстве, и ошибки, «заимствованные» у предыдущего утверждения, вполне самостоятельного и обособленного. Упомянем еще о третьей категории ошибок — так называемых догматических ошибках. Эти ошибки возникают «в готовом виде»: их

истинность иногда настолько «очевидна», что не требует доказательства.

Ошибки в доказательстве подразделяются на вычислительные, логические и интуитивные. Мы уже приводили пример вычислительной ошибки. Следует однако, помнить, что механически можно выполнять не только числовые, но и алгебраические выкладки. Нетрудно, например, ошибиться и вместо знака минус написать знак плюс.

Примером логической ошибки может служить рассуждение, которое приводит в своей книге «Сокровищница парадоксов» английский математик и логик де Морган. Один квадратурщик (то есть человек, пытающийся решить задачу о квадратуре круга) объяснял де Моргану свое решение, исходя из предположения о том, что  $\pi < 3,1416$ . После долгих рассуждений он пришел к выводу, что  $\pi < 3,1416$ . Когда же де Морган указал ему на то, что он с самого начала принял доказываемое утверждение за истинное, квадратурщик в ответ сослался на Евклида: если знаменитый автор «Элементов» не раз, исходя из ложного предположения, доказывал истинные утверждения, то почему бы ему, квадратурщику, не взять за отправной пункт доказательства истинное утверждение, каковым несомненно является отстаиваемый им тезис « $\pi < 3,1416$ »? «Математик», о котором рассказывал нам де Морган, открыто выступил против логики, что бывает довольно редко, и не понимал сути доказательства от противного.

Другим примером логической ошибки служит ошибочное определение. Парижская «Эксельсьиор» однажды сообщила о столкновении между полковником Монтейлем, представившим Академии работу с решением древней задачи о трисекции угла, и секретарем Академии математиком Дарбу, отклонившим эту работу. Возник спор, в ходе которого Дарбу попросил полковника:

— Сначала дайте определение того, что Вы называете длиной окружности, а потом мы обсудим Вашу работу.

Ответ Монтейля гласил:

— Длину не определяют, длину измеряют.

Поскольку основное понятие было «индефинитным», то есть не поддавалось определению, дискуссия не состоялась.



Логические ошибки такого типа, связанные с незнанием основ математики, встречаются еще чаще, чем ошибки предыдущего типа. Определение длины кривой существует и было известно, хотя и не в той форме, как ныне, еще в глубокой древности и заново сформулировано уже в XX в. математиками Пеано и Жорданом.

Измерение — это некое реально производимое действие, неприменимое к идеальным объектам, рассматриваемым в математике. Небезынтересно заметить, что если бы полковник Монтейль, стремясь добиться принятия своей работы, дал определение длины окружности, то Академия могла бы сослаться на знаменитое постановление от 1775 г., согласно которому все работы о трисекции угла и квадратуре круга надлежит отклонять, даже не читая. Мотивируя решение Академии, Кондорсе, бывший в то время ее непременным секретарем, совершил ошибку, утверждая, будто невозможность квадратуры круга доказана, поскольку в действительности в 1775 г. невозможность квадратуры круга еще не была доказана. Однако ошибка Кондорсе отличается от ошибки Монтейля тем, что Кондорсе руководствовался инстинктом математиков, позволившим ему в 1775 г. предвидеть истинность утверждения, доказанного спустя 100 лет. Монтейль же не хотел понять того, что в его время можно было найти в любом учебнике элементарной геометрии.

Логическая ошибка в доказательстве может состоять в пробеле, или перескакивании, через какое-то звено доказательства. Иногда пробел бывает столь велик, что от доказательства ничего не остается. Например, пусть кто-нибудь «доказывает» равенство  $a + b = b + a$ , ссылаясь на то, что от перестановки слагаемых сумма не

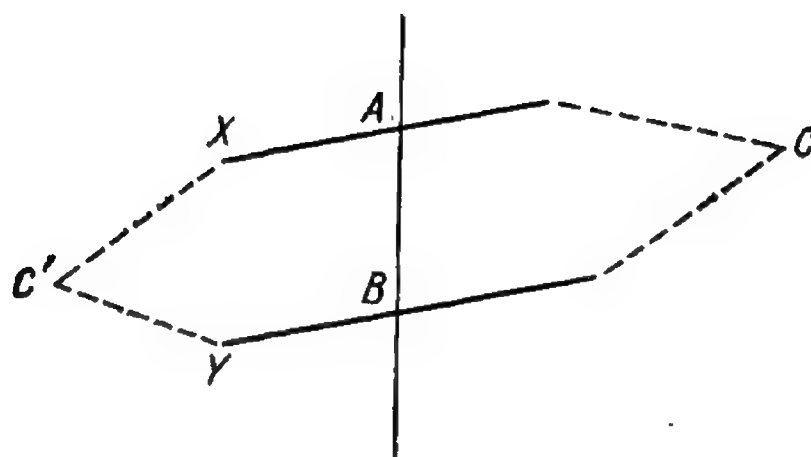


Рис. 31.

изменяется. Совершаемая им логическая ошибка называется тавтологией: он лишь повторяет то, что должен доказать, и, хотя приводимое им заключение правильно, фраза, которую он считает доказательством, в действительности таковым не является.

Даже истинные утверждения, если они *слишком очевидны*, могут стать источником ошибок в доказательствах. Приведем пример, заимствованный из одного школьного учебника элементарной геометрии. Речь идет о доказательстве теоремы о том, что две прямые, пересеченные одной и той же третьей прямой, параллельны, если внутренние накрест лежащие углы равны.

Предположив, что прямые пересекаются в точке  $C$ , автор учебника накладывает треугольник  $ABC$  (рис. 31) на левую (относительно прямой  $AB$ ) полуплоскость так, чтобы точка  $B$  совпадала с точкой  $A$ , а точка  $A$  — с точкой  $C$ , прямая  $AC$  идет по направлению прямой  $BY$ , прямая  $BC$  — по направлению прямой  $AX$  (поскольку внутренние накрест лежащие углы равны). Точке  $C$  соответствует при этом некоторая другая точка  $C'$  — еще одна точка пересечения прямых  $AX$  и  $BY$ , что противоречит аксиомам геометрии.

Ошибка этого рассуждения заключается в использовании недосказанного утверждения: оно молчаливо предполагает, что точки  $C$  и  $C'$  различны. Приводимое рассуждение не исключает того случая, когда точки  $C$  и  $C'$  совпадают, а это сводит на нет всю его доказательную силу. Таким образом, в доказательстве автора учебника имеется существенный пробел. Автор использует признак равенства треугольников так, словно у него есть 2 треугольника  $ABC$  и  $ABC'$ , хотя существование треугольника  $ABC'$  еще требуется доказать. Впрочем, этот пробел легко восполнить. Кроме того, у тех, кто прочитает «доказательство», приводимое автором учебника, не остается сомнения в правильности утверждения. «Доказательство» обладает силой убеждения лишь потому, что утверждение теоремы и без всякого доказательства отвечает нашей геометрической интуиции.

В знаменитых «Основаниях геометрии» Гильберта имеется набросок доказательства теоремы о двух прямых, пересекаемых одной и той же третьей прямой. Но и там имеется пробел, поскольку Гильберт говорит о том, что один угол больше другого, не указав в своих

аксиомах и определениях, какие углы следует считать большими и какие меньшими. Ошибка Гильберта легко устранима, ошибка автора учебника элементарной геометрии носит более принципиальный характер.

Не всегда, однако, использование в доказательстве нового принципа следует считать ошибкой. Именно к такому «новшеству» прибег Паскаль, когда при доказательстве некоторого утверждения о коэффициентах бинома Ньютона обратился к принципу полной математической индукции. Выяснилось, что без этого принципа в доказательствах многих простейших математических теорем имелись пробелы, а сам принцип полной математической индукции вошел в математику как один из ее наиболее важных методов.

Латинская поговорка *Duo cum faciunt idem, non est idem*\* применима и к математике. В 1754 г. вышел очередной том знаменитой французской энциклопедии, в котором Даламбер упрекнул всех математиков в том, что они неправильно решают следующую задачу из теории вероятностей: какова вероятность выпадения при двух бросаниях монеты по крайней мере одного герба? Все математики рассуждали так: «Возможны четыре исхода: герб — герб, герб — решетка, решетка — герб и решетка — решетка. Три первых исхода благоприятны. Следовательно, вероятность выпадения одного герба составляет  $\frac{3}{4}$ ». Даламбер считал, что возможны лишь три исхода: герб, решетка — герб и решетка — решетка. При этом он ссылался на то, что выпадение герба при первом же бросании монеты делает излишним второе бросание. Поскольку благоприятными являются лишь два первых исхода, вероятность выпадения по крайней мере одного герба составляет  $\frac{2}{3}$ .

Ошибка Даламбера интересна тем, что он умышленно создал пробел в существовавшем безошибочном рассуждении. Даламбер воспользовался тем, что в теории вероятностей недостаточно перечислить все возможные случаи. Необходимо, чтобы все рассматриваемые комбинации исходов были равновероятны. Комбинации же «герб» и «решетка — герб» не равновероятны. Когда Неккер из Женевы написал об этом Да-

---

\* Когда двое делают одно и то же, то получается не одно и то же.

ламберу, тот признал замечание обоснованным, но от своего утверждения не отказался.

Приведем пример еще одной ошибки, связанной с неоднозначностью языка. Один автор обвинил принцип математической индукции в том, что тот «срабатывает» не во всех случаях и иногда приводит к неверным заключениям. В подтверждение своих слов он привел такой пример. Выражение  $2 \cdot 3 \cdot 5 \dots \cdot (2n + 1) + 1$  порождает простые числа при  $n = 1, 2, 3$ , но не порождает простого числа при  $n = 4$ .

Утверждение этого автора ошибочно, поскольку приводимый им пример индукции не имеет ничего общего с полной математической индукцией. Автор совершенно прав в том, что неполная индукция, часто используемая в естественных науках, не пригодна как средство обобщения в математике. Ферма предполагал, что при любом  $k$  число  $2^{2^k} + 1$  простое (см. раздел IV). Однако Ферма высказал свое мнение в форме гипотезы, поэтому его нельзя упрекнуть в том, что он совершил ошибку.

Опасности, таящиеся в логике, могли бы склонить многих к поиску защиты от ошибок в интуиции. К сожалению, интуиция не раз сама становилась источником новых ошибок. Психология математических типов учит, что «интуиционисты»\* чаще всего опираются на пространственное воображение. Интуиционист, например, с трудом воспримет доказательство теоремы о том, что прямая делит плоскость на две части — для него утверждение теоремы более очевидно, чем любое доказательство (кстати сказать, именно поэтому теорема была доказана лишь в 1882 г. Пашем). Об этом вряд ли стоило бы говорить, если бы пространственное воображение иногда не становилось источником ошибочных утверждений. Так случилось, например, с Вейерштрассом, считавшим, что непрерывная функция не может не иметь производной всюду. Ясно, что дурную услугу ему оказало именно пространственное воображение — интуитивный образ непрерывной кривой.

---

\* Имеется в виду деление математиков на логиков и интуиционистов, предложенное А. Пуанкаре (см. стр. 358). Об интуиционизме как направлении в современной математике см. книгу А. Гейтинга, Интуиционизм, М., изд-во «Мир», 1965. — Прим. перев.

Опыт показывает, что интуиционисты ошибаются реже, чем логики, и что большинство их ошибок содержится в доказательствах, а не в утверждениях. Труднее всего интуиционисту дается полная дизъюнкция: выбор одного из двух взаимоисключающих случаев. В математике полная дизъюнкция чаще всего сводится к необходимости различать два случая: предмет  $P$  либо обладает признаком  $C$ , либо не обладает признаком  $C$ . У интуициониста всегда наготове геометрический образ, соответствующий первому случаю, когда предмет  $P$  обладает свойством  $C$ . Представить же себе столь же наглядно второй случай, когда предмет  $P$  не обладает признаком  $C$ , интуиционисту трудно, поэтому он старается свести полную дизъюнкцию к следующему выражению: «Предмет  $P$  обладает либо свойством  $C$ , либо свойством  $D$ , либо свойством  $E$ , либо свойством  $F$  и т. д.» Исчерпав все взаимоисключающие признаки, какие только можно представить себе в качестве признаков предмета  $P$ , интуиционист вполне искренне будет думать, что перебрал вообще все возможные признаки предмета  $P$ .

Типичным примером ошибок, совершаемых интуиционистами, может служить формула Эйлера, согласно которой число ребер  $E$ , граней  $F$  и вершин  $V$  *любого* многогранника удовлетворяет соотношению  $E + 2 = F + V$ .

В рассуждении, которое привело к этой формуле, не учитывалось, что между понятием «многогранник» и наглядным представлением о многограннике, каким оно было у Эйлера, имеется различие, поскольку многогранник не обязательно должен быть односвязным (как, например, куб): ничто не мешает ему быть многосвязным (например, иметь форму рамы с отверстием посередине). Проводя рассуждения лишь для односвязной модели многогранников, Эйлер бессознательно сузил объем понятия «многогранник».

Обратимся теперь к другому типу ошибок, совершаемых в тех случаях, когда в процессе доказательства используют ошибочное вспомогательное утверждение, заимствованное откуда-то в «готовом виде». Если это вспомогательное утверждение можно рассматривать отдельно, то относительно содержащейся в нем ошибки можно сказать то же, что и относительно уже разобранных нами случаев. Однако поскольку речь идет о заимствовании «постороннего» утверждения, то открываются

возможности новых недоразумений, в том числе и таких, когда вспомогательное утверждение в оригинале вполне правильно и лишь позднее либо искажено при цитировании, либо неправильно понято. Случаи, когда математики используют ошибочные утверждения других авторов, встречаются редко, поскольку заметить соринку в глазу ближнего легче, чем бревно в собственном глазу, и особенности мышления или случайные обстоятельства, приведшие к ошибке у одного автора, не повторяются у другого. Однако не раз бывало, что даже небольшой пробел в доказательстве, заимствованном одним математиком у другого, становился причиной ошибки. Поэтому стало традицией не пользоваться утверждениями, доказательства которых неизвестны, и не полагаться на авторитеты. Может быть, когда-нибудь наука достигнет столь высокого уровня развития, что подобный контроль станет просто излишним, однако сегодня он просто необходим, поскольку позволяет организму науки оставаться здоровым, несмотря на сотни ошибок.

Поговорим теперь о том, как следует отыскивать ошибки. Для этого обратимся к математическим работам, написанным до Вейерштрасса, когда повсеместно пользовались геометрическим методом, или к еще более раннему периоду, когда открытия в области дифференциального исчисления следовали одно за другим гораздо быстрее, чем выкристаллизовывались фундаментальные понятия и определения. Ошибки лучше искать у великих математиков, чем у посредственных, поскольку великие математики, ставя перед собой более дерзкие научные цели, ошибаются не меньше других, но зато их ошибки значительно интереснее и гораздо поучительнее. Математики меньшего ранга совершают ошибки из-за поспешности, особенно если речь идет о таких ненаучных целях, как приоритет, получение награды или научного звания. Примером могут служить работы, представленные в свое время на соискание премии Ферма. Один из немецких журналов постоянно занимался разбором этих работ и почти всегда находил в них ошибки. В более легких случаях для обнаружения ошибок можно пользоваться надежными, так сказать, «домашними» средствами. Одно из них состоит в том, что общее утверждение рассматривается на каком-то частном случае, по возможности простом. Другой способ состоит в проверке



всех данных, входящих в посылки, без которых используемое в доказательстве утверждение неверно.

Поиск ошибок не следует рассматривать как проявление дурного характера или придирчивость. Не следует упускать из виду, что избежать ошибки необычайно трудно и ошибались даже самые выдающиеся математики, поэтому в том, чтобы совершить ошибку, нет ничего позорного. Устранение ошибки, сколько бы раз оно ни производилось, оказывает услугу науке. Но есть еще одна причина, по которой составление коллекции математических ошибок имеет большое значение, в особенности для тех, кто собирается изучать математику. Такая коллекция становится одним из наиболее «сильнодействующих» средств обучения. Студент, получивший задание найти ошибку в той или иной работе и заранее знающий, что ошибка там действительно есть, выполняет самостоятельную работу, приносящую ему немалое удовлетворение. В то же время он уверен, что, проследив шаг за шагом всю цепь доказательств, непременно обнаружит «треснувшее» звено. От него требуется не изобретательность, а гарантия, что данную ему работу он внимательно прочитал и глубоко разобрался в ее содержании.

После того как ошибка обнаружена, возникает вторая, более трудная задача: ошибку необходимо исправить. Если ошибка сводится к допущенному автором просмотру и имеет несущественный характер, то эту задачу удастся решить без особого труда.

Наконец, третья задача состоит в том, чтобы построить контрпример, то есть пример, опровергающий ошибочное утверждение. Контрпример — это некий математический объект, обладающий всеми свойствами, перечисленными в условии ошибочного утверждения, но не согласующийся с его заключением. Контрпример особенно наглядно показывает ложность утверждения.

Как избежать ошибок?

Прежде всего, не публиковать работы, написанные в спешке, и заниматься лишь той областью математики, которую основательно знаешь. Доказательства излагать только в письменном виде — тогда их легче анализировать. Доказательство должно быть как можно более полным. Пропуски и скачки допускаются лишь в тех случаях, где можно сослаться на общеизвестные леммы,



доказанные независимо друг от друга многими математиками. Доказательства лемм математик должен ясно представлять себе (по крайней мере, пока он пишет ту работу, в которой использует эти леммы). Не пользоваться не доказанными леммами, даже если их утверждения кажутся самоочевидными и не вызывающими никаких сомнений. Помнить об определениях введенных понятий и не пользоваться в доказательстве теми их свойствами, которые не указаны явно в определениях. Опирается при доказательствах на аксиомы и только на аксиомы, перечисленные в основаниях теории. Проверять правильность доказываемой теоремы, выводя из нее следствия или применяя к уже известным примерам. Стараться по возможности упрощать доказательство. Перед публикацией доказательство желательно обсудить с опытными математиками и учесть их критические замечания.

Иногда утверждению можно придать геометрический или механический смысл; и тогда кроющаяся в нем ошибка бросается в глаза. Иногда ошибку удастся обнаружить, рассматривая общую теорему на частных случаях. Но есть еще один способ, заведомо гарантирующий успех: полная формализация доказательства на манер Расселла или Пеано, то есть подробное прослеживание всех его звеньев, записанных с помощью специальных обозначений. Это лекарство столь радикально, что, как утверждают некоторые (например, Пуанкаре), оно не только исцеляет, но и убивает математику. Доказательство даже простейших теорем становится столь трудоемким, что его не удастся довести до конца. Поэтому формальные символы становятся источником новых ошибок — ошибок в обозначениях, так же как любой научный прибор становится источником новых инструментальных ошибок. Необходимо поэтому соблюдать меру и использовать символику лишь там, где можно подозревать, что без нее мы непременно допустим ошибку. Иначе говоря, при всей изощренности и утонченности математического мышления здравым смыслом не следует пренебрегать и в науке.

*Вкусив от сладкого плода математики, мы уподобляемся лотофагам, ибо, воспользовавшись ею хоть раз, мы не хотим от нее оторваться и она овладевает нами, как цветок лотоса.*

*Аристотель*

### VIII. МАТЕМАТИКА И ЖИЗНЬ

*Математики и псевдоматематики. — Преследования математиков при Юстиниане. — Математический талант. — Изучение математики. — Разделы математики. — Женщины-математики. — Какой математике учить? — Математика как панацея от всех бед.*

О математике и математиках часто можно услышать самые нелепые — одно удивительнее другого мнения. На то есть свои причины. Дело в том, что математиков в собственном смысле слова очень мало. За математиков обычно принимают различных псевдоматематиков: всех, кому приходится много вычислять, маньяков, погрязших в бесплодных и бессмысленных выкладках, обладателей дипломов об окончании математического факультета университета и математиков-любителей. Говоря о людях, обладающих «выдающимися математическими способностями», нередко называют имена, неизвестные в математической литературе. В подтверждение столь высокой оценки обычно ссылаются на доски, «сплошь исписанные сложнейшими выражениями», о способности безошибочно вычислять «в уме» произведения многозначных чисел, о решении сложнейших геометрических задач на построение. В этой связи уместно вспомнить, что математики редко любят и умеют производить численные выкладки. В книжке Бине «Великие вычислители и игроки в шашки» анализируются несколько типов вычислителей, способных производить, не прибегая к карандашу и бумаге, сложнейшие выкладки с многозначными числами, причем все они не математики. В то же время известно, что

Гаусс великолепно справлялся с численными расчетами. Среди шахматистов математики встречаются чаще, но среди чемпионов математиками были лишь Ласкер и Эйве.

Математик — довольно редкий тип человека. Он не только обладает математическими способностями, но и получил специальное образование, позволяющее ему в своей работе пользоваться математическим методом, то есть самостоятельно находить способы решения математических задач, не поддававшихся ранее усилиям других людей. Научиться этому невозможно, ибо от математика требуется не только усидчивость, но и особый склад мышления, умение додумывать не сформулированные в явном виде, но тем не менее важные подробности математических теорий. Истинных математиков немного, а те, кто их окружает, нередко даже не считают их математиками, поскольку их деятельность внешне ничем особо не проявляется. Зато «псевдоматематиков» можно встретить довольно часто. Одни из них хлопочут о получении наград, другие бьются над решением неразрешимых задач, третьи открывают вещи, давно и повсюду известные.

Истинных математиков очень мало, и это вполне объяснимо. Общество не нуждается в большом числе математиков потому, что уже существующие разделы математики достаточны для решения подавляющего большинства практических задач и дальнейшее развитие математики — дело немногочисленной группы истинных математиков — ничуть не служит препятствием к удовлетворению практических потребностей. Все это приводит к тому, что спрос на творческую, чисто математическую работу мал, и профессия математика сулит не больше материальных благ, чем профессия энтомолога, и уступает профессиям филолога, поэта, художника и музыканта.

И все-таки внутренняя потребность в математической деятельности у истинных математиков столь велика, а приносимое ею удовлетворение и интеллектуальное наслаждение столь значительно, что они продолжали бы заниматься любимой наукой даже под угрозой изгнания, как при римском императоре Юстиниане.

Малый спрос на истинных математиков служит мощным «антиматематическим» аргументом для тех, кто

привык все измерять на деньги: «Видно, не очень это важное дело, если за него не платят». Аргумент этот нельзя считать столь уж нелепым, а деньги — не худший из показателей ценности, даже когда речь идет об интеллектуальных ценностях. Однако если математическая деятельность не ценится, то лишь потому, что плоды ее достаются всем бесплатно. Даже если бы математики рассуждали как коммерсанты и вздумали *скрывать* свои теоремы (язык не поворачивается сказать о теоремах, что их *скрывают*: теоремы нужно *открывать*!), то им пришлось бы организовать нечто вроде тайного общества, объединяющего всех, кто наделен математическими способностями. Вряд ли нужно говорить, что математика вскоре перестала бы развиваться, ибо наука не может развиваться без свободного обмена идеями.

Работа математика окружена множеством предрассудков. Выражением их служит широко распространенное пренебрежительное отношение к людям, занимающимся вычислениями (хотя читателю уже известно, что математика имеет весьма отдаленное отношение ко всякого рода «калькуляции», основанной на механическом — более или менее искусном — использовании давно известных правил элементарной арифметики). Одни считают математиков людьми сухими, неспособными к творческому мышлению, склонными к пустой игре символами, другие обвиняют в незнании действительности, недостаточном уровне общего развития, полном невежестве в вещах, не связанных с математикой, и слепоте ко всему прекрасному.

О символomanии мы уже говорили в разделе I. Самым важным, по-видимому, следует считать упрек в «незнании действительности». Его следует понимать так. Математик, будучи человеком далеким от действительности и пребывающим в мире математических абстракций, то есть живущим в нереальном мире, либо утрачивает способность понимать явления окружающего его мира, не поддающиеся переводу на язык математических понятий, либо усматривает привычные ему формы там, где их нет и в помине, и упорствует в своем заблуждении, либо вынужден отказаться от высказывания даже ошибочных суждений о действительности.

Этот наиболее серьезный упрек следует отклонить как несостоятельный потому, что в нем содержится со-

вершенно неопределенное понятие действительности. Единой, истинной, «реальной» действительности, которую можно было бы противопоставить какому-то вымышленному миру математических абстракций, не существует. С научной точки зрения существование чисел вполне обоснованно и достоверно. Если подобный упрек модифицировать и сформулировать иначе, сказав, например, что люди, хорошо ориентирующиеся в математической действительности, обычно плохо ориентируются в действительности, данной нам в ощущениях, то тогда его еще можно было бы поддержать, но при этом он утратил бы свою значимость. Ведь хорошо известно, что люди, занимающиеся одним видом деятельности, плохо ориентируются в чуждой им области, а если все виды человеческой деятельности равноправны, то упрек, высказанный в адрес математиков, утрачивает свою остроту.

Аналогично можно было бы возразить и на сетования по поводу недостаточно высокого уровня общего развития математиков. Более того, нельзя не упомянуть о нередких примерах математиков, обладавших поистине универсальным гением. Достаточно назвать имена Декарта, Паскаля, Лейбница и Пуанкаре, не говоря уже об античных ученом.

Обвинение в слепоте (и глухоте) ко всему прекрасному относится к восприятию математиками произведений изобразительного искусства, музыки и поэзии. Не вдаваясь в подробное рассмотрение этого весьма трудного вопроса, вспомним лишь таких математиков-художников, как Дюрер и Леонардо да Винчи, и таких математиков-поэтов, как Эдгар По. Сами математики считают свою профессию своего рода искусством и любят повторять слова Кронекера: «Нельзя быть математиком, не будучи поэтом». Наблюдения, произведенные в крупных математических центрах, где работает большое число математиков, свидетельствуют о несостоятельности любых попыток установить соответствие между математическими способностями личности и какими-то ее духовными или физическими особенностями. Среди математиков встречаются люди, любящие литературу и искусство, и, напротив, люди, относящиеся ко всему, что лежит вне их профессии, равнодушно, люди, обладающие литературными и художественными способностями и лишенные этих способностей (например, Пуанкаре по

праву считался тонким стилистом), физически сильные и слабые, нелюдимые и любящие дружескую компанию, не берущие в рот ни капли спиртного и алкоголики, практичные и беззаботные, причем между каждой парой противоположных крайностей существует еще целая шкала промежуточных типов.

Принято считать, что для того, чтобы «понимать» математику и заниматься ею, требуются особые, «врожденные» способности. Как и прочие предрассудки, это мнение не соответствует действительности. При умелом подходе любому человеку, обладающему средними способностями, можно систематически изложить любой раздел математики. Если иногда оказывается, что даже одаренные выпускники средних школ не оправдывают возлагаемых на них надежд и не оканчивают математический факультет, то происходит это из-за высокого темпа лекций, требующих от слушателя умения дополнить доказательство. Студент-математик должен помнить и уметь применять «сию минуту» определения и теоремы, которые встречались ему давно.

Итак, можно сказать, что занятия математикой *теоретически* не требуют особых способностей, но *практически* такие способности желательны. Если же говорить о математическом творчестве, то даже способностей, достаточных для понимания лекций и решения учебных задач, перестает хватать. Здесь требуется особый дар, как бы мы его ни называли: гениальностью, творческой силой или божественным даром.

Психологов и философов уже давно интересуют внутренние процессы, сопровождающие математическое творчество. Из самоанализа математиков (главным образом из статьи Пуанкаре) следует, что главная часть творческой работы совершается бессознательно. Не раз после многодневных бесплодных проб и усилий счастливая идея выныривает из мрака бессознательного. Однако объединение свободных понятий и отношений в нужные комбинации происходит не случайно. Об этом свидетельствуют признания математиков, часто даже во сне продолжающих поиск решения.

Довольно часто даже у весьма одаренных математиков наблюдается нежелание, граничащее почти с отвращением, заниматься подготовкой своих открытий к печати или систематически излагать новые теории. Уме-



ние редактировать и ясно писать математические работы — особый талант, встречающийся, к сожалению, довольно редко. Правда, такие крупные математики, как Евклид, Гаусс, Якоби, Дирихле, Чебышев, Кантор, Пуанкаре писали ясно.

Мнение о том, будто педагогов-математиков, то есть людей, наделенных даром доступно излагать любую математическую теорию, но не ведущих самостоятельных исследований, нельзя считать истинными математиками, весьма спорно. Сомнения вызывает не только опыт, но то обстоятельство, что, желая сделать математическую лекцию доступной слушателям (а каждая аудитория обладает своим уровнем подготовки), педагог, пользующийся даже самыми новыми и самыми лучшими учебниками, вынужден одни доказательства заменить другими, дополнить и переработать их, а это, хотя и в небольшом объеме, требует уже творческой работы. Тот же, кто лишен способностей педагога-математика, обречен стать невольником своих же собственных конспектов и рукописей и не сможет удовлетворить запросов слушателей.

Изучение математики требует систематической работы, рассчитанной на много лет и проводимой под руководством квалифицированных преподавателей с использованием лучших учебников. Популярные книги позволяют составить лишь общее представление о математике, изучить математику по ним трудно.

Изучают математику главным образом в университетах. Занятия делятся на лекции и упражнения. Лекционный курс посвящен изложению какой-нибудь важной математической теории и разбит на отдельные лекции так же, как учебник — на главы. Не следует думать, однако, будто лектор просто пишет на доске учебник. Лекции воспринимаются легче, чем учебник: лектор имеет возможность вернуться к намеченному ранее доказательству, дополнить его по мере надобности, дать необходимые объяснения слушателям и т. д. Однако поскольку лектор следует лишь написанному дома конспекту, то польза от прослушивания лекции меньше, чем от чтения учебника. Кроме того, книга обладает перед лекцией тем преимуществом, что не требует сосредоточить внимание именно *сейчас, в данную минуту*, поскольку она всегда под рукой. Оба средства



математического просвещения — лекция и книга — взаимно дополняют друг друга.

Упражнения по математике можно разделить на два типа: студенты либо решают под руководством преподавателя задачи на применение теорий, излагаемых им на лекциях, либо решают более сложные задачи, обращаясь в наиболее трудных местах за помощью к тому, кто проводит занятия.

Математики-самоучки встречаются редко, но все же встречаются. Рассказывают, что Паскаль в возрасте 12 лет самостоятельно, не заглядывая ни в какие учебники, доказал первые теоремы геометрии.

Математики очень любят знакомиться с новыми областями знания, беседуя со специалистами. Способ этот, несомненно, очень удобен, поскольку позволяет сразу же разрешать все сомнения и вопросы. Бесплодная дискуссия, в которой каждая из сторон, не слушая доводов оппонента, отстаивает свою точку зрения, — чрезвычайно редкое явление в математике, и это понятно: математики всегда стремятся «докопаться» до сути явления.

В современной математике специализация давно уже стала привычным явлением. Одному человеку не под силу охватить всю математику в целом. Редко можно встретить в наши дни математика, который бы одинаково владел синтетической геометрией и теорией функций, теорией вероятностей и топологией. Чтобы читатель мог составить представление о многообразии современной математики, перечислим лишь некоторые из ее разделов: математическая логика, теория множеств, теория чисел, основания геометрии, алгебра, теория функций действительного и комплексного переменного, вариационное исчисление, функциональный анализ, дифференциальная геометрия, топология, теория вероятностей и т. д.

Немного найдется математиков, которые могли бы о себе сказать, что они досконально знают *хотя бы два* из названных нами разделов. Более того, со времен Штейнера пропасть, отделяющая математиков, занимающихся синтетической геометрией, от остальной части их ученых коллег, сильно углубилась.

Пуанкаре делил математиков на два типа: на *логиков* и *интуиционистов*. Первые в своей работе действуют строго логично, интуиция и пространственное воображение у них не играют никакой роли. Вторые «видят» ма-

тематические зависимости, а доказательства приспособливают к тому, что видят. Логиками, несомненно, были Евклид, Гаусс, Лейбниц, Дирихле и Кантор, интуиционистами — создатели дифференциального исчисления Гюйгенс, Ньютон, братья Бернулли, а также сам Пуанкаре. Психологические условия влияют на склонности и на выбор внутри математической специальности. Логики предпочитают работать в области арифметики, теории чисел, теории множеств и алгебры, интуиционисты — в геометрии, теории функций комплексной переменной и в приложениях. Встречаются и математики «смешанного типа». Однако нет сомнений в том, что современная эпоха развивается в логическом направлении и современная математика отпугивает прирожденных геометров все возрастающими требованиями к строгости определений и доказательств.

Весьма спорен вопрос о том, передается ли математический талант по наследству. История математики не знает случаев, когда сыну великого математика удалось добиться выдающихся достижений на том же поприще, что и отцу, хотя математическая одаренность в семьях крупных математиков встречается довольно часто.

Среди математических звезд первой величины прошлого мы встречаем представителей разных народов: немцев Гаусса, Дирихле, Римана, Вейерштрасса, Куммера, Якоби, Кантора, французов Ферма, Коши, Лагранжа, Фурье, Лапласа, Эрмита, англичан Гамильтона и Кэли, итальянца Бельтрами, русских Лобачевского и Чебышева, венгра Бойяи, норвежцев Ли и Абеля.

Имена Софи Жермен, Софьи Ковалевской и Эммы Нетер служат контрпримером некогда распространенного мнения о том, что математика якобы чисто мужская профессия.

Изучение математики чрезвычайно ценно с точки зрения педагогики. Формальная логика находит в математике благодатнейшую почву для упражнений и примеров. Ни одна наука не укрепляет так веру в силу человеческого разума, как математика. Возможность доказательства любой теоремы исключает любые словесные ухищрения. В независимости математических утверждений от фразы, авторитета, от биографических данных исследователя и от «точки зрения» состоит не

только научная, но и педагогическая ценность математики. Оперируя с понятиями, подсказанными здравым смыслом, мы отводим математике ответственнойшую роль «умственной гигиены».

Математика учит трезвому мышлению, но и содержание математических теорий бывает не лишено мистического элемента. Принятое и в наше время название «мнимые числа» для обозначения корней из отрицательных чисел (например,  $i = \sqrt{-1}$ ,  $2i = \sqrt{-4}$  и т. д.) указывает на происхождение этого элемента.

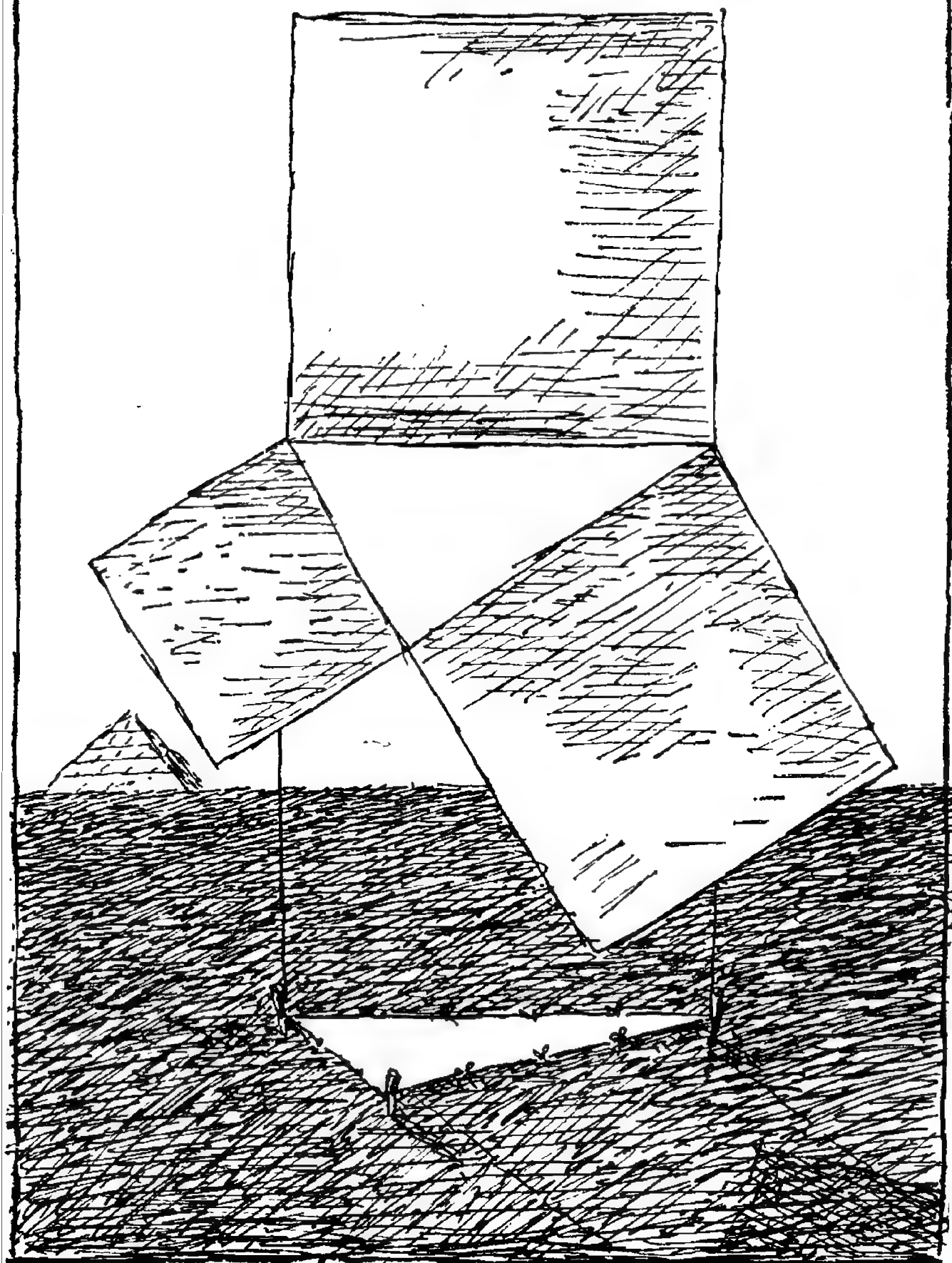
Создатели мнимых и комплексных чисел  $a + bi$  несомненно считали  $\sqrt{-1}$  каким-то числовым уродом, обладающим, помимо свойств обычных действительных чисел, тем парадоксальным свойством, что его квадрат равен отрицательному числу ( $i^2 = -1$ ). Гаусс в 1799 г. и за два года до него Каспар Вессель интерпретировали комплексные числа, введя на плоскости прямоугольную систему координат и сопоставив каждому комплексному числу  $a + bi$  точку плоскости с координатами  $a$ ,  $b$ . Открытие Гаусса, придав понятию комплексного числа строгость, лишило его (хотя и не полностью) мистического ореола, но лишь предпринятая в XX в. критика понятия числа обратила внимание на следующее обстоятельство. Уже дробные числа (например,  $\frac{3}{4}$ ,  $\frac{2}{3}$ , ...) можно определить лишь как *упорядоченные пары натуральных чисел*, а иррациональные числа — как множества рациональных чисел, то есть множества упорядоченных пар натуральных чисел. Таким образом, в роли элементарных чисел, своего рода «химических элементов» арифметики, остаются лишь натуральные числа 1, 2, 3, 4, ... . «Натуральные числа создал господь бог, все остальное — дело рук человека», — говорил Кронекер.

Итак, комплексные числа «мнимы» ничуть не больше, чем дроби, отрицательные или иррациональные числа. Чудесны не числа, а лишь гениальное открытие их создателей. Не следует упускать из виду и то, что для древних греков понятие иррационального числа (например,  $\sqrt{2}$ ) казалось столь же непонятным, парадоксальным и таинственным, как для европейца конца XIX в. понятие мнимого числа, а для европейца 1905 г. — понятие локального времени Эйнштейна.

Люди, далекие от математики, склонны приписывать ей непогрешимость, которой она не обладает, и усматривать в математических формулах своего рода «философский камень». Естествоиспытатели не раз пытались и пытаются найти математическую формулу, которая бы охватила их наблюдения или теорию и придала им целостность. Нередко их попытки заранее обречены на неудачу. Действительно, если биолог оперирует такими расплывчатыми понятиями, как «влияние окружающей среды», «наследственность», «раса», «приобретенный признак», и обозначает их математическими символами, то от этого понятия не становятся точнее. Чтобы мы могли применять к каким-то понятиям математический метод, необходимо прежде всего построить их аксиоматику, и каждую аксиому (поскольку речь идет о применимости теории к опыту) подвергнуть сравнению с опытом. Проверка аксиом невозможна, если в игру входят полностью или даже частично не определенные понятия. Часто совершают еще одну ошибку: считают «величиной» то, что не поддается измерению. Формула, являющаяся отнюдь не конечной целью прикладной науки, а лишь средством для описания и понимания известных и предсказания новых явлений, становится при этом надгробием мысли, на котором следовало бы написать: «Торжество науки над здравым смыслом». Интересно заметить, что математики таких недоразумений не любят и часто предостерегают от переодевания нематематического содержания в математический наряд.

Ясно, что установление математического господства над новой областью мысли всякий раз становится необычайно важным научным достижением, но, чтобы расширить границы применимости математики, недостаточно просто вбить колышки с математическими надписями. Сначала необходимо полностью выяснить основы математизируемой области знания и сформулировать строгие определения.

# РАЗМЫШЛЕНИЯ О ЛЮБИМОЙ НАУКЕ



По традиции начало каждого учебного года принято отмечать торжествами, одним из пунктов которых должна быть публичная лекция. Я присутствовал на многих таких торжествах, но никогда не слышал, чтобы лектором был математик. Обычно эту почетную обязанность возлагают на гуманитариев, чаще всего на философов или историков, реже — на юристов, иногда — на биологов, медиков или даже на физиков, но никогда — на математиков. Когда уважаемый ректор поручил мне выступить с лекцией на торжествах по случаю начала нового учебного года, я понял, что старая традиция не лишена оснований. Поэтому и название лекции я выбрал такое, чтобы оно понравилось представителям гуманитарных наук, если не всем, то по крайней мере историкам. Не будучи историком (о чем мне приходится лишь сожалеть), я никогда не осмелился бы выступать в этом актовом зале на тему о математике прошлого, если бы этим летом не встретил одного молодого зоолога, который задал мне следующий вопрос:

— Почему теоремы, доказательства которых математики находят лишь сейчас, не были доказаны нашими предками?

---

\* Лекция, прочитанная 6 октября 1958 г. по случаю начала учебного года во Вроцлавском университете. — *Прим. перев.*

Сначала я никак не мог понять смысла вопроса, но после короткого обмена мнениями загадка выяснилась. Мой собеседник видел принципиальную разницу между биологией и математикой в том, что в биологии методы исследований все время обновляются. Стоило физикам сконструировать микроскоп, как биологи взяли его «на вооружение». Как только точная механика позволила строить микротомы, биологи стали применять новый инструмент в своих исследованиях. Открыли химики новые красители, и те тоже были пущены в дело. По мнению молодого биолога, с которым я беседовал, математика не может рассчитывать на такую помощь извне, которая в биологии является двигателем прогресса. Поэтому он и удивлялся, что математика за истекшие тысячелетия не исчерпала всех возможностей, тающихся в известных с незапамятных времен понятиях, и не стала мертвой наукой, подобно грамматике какого-нибудь мертвого языка.

Сегодня я хотел бы ответить на этот вопрос, которому я обязан названием своей лекции, но опасаясь, что поставил себе слишком трудную задачу. Лекция о математике, прочитанная перед слушателями, среди которых математики составляют незначительное меньшинство, не может рассчитывать на хороший прием у аудитории. В этом смысле позиция представителя любой гуманитарной профессии лучше хотя бы потому, что он разговаривает с аудиторией на обычном языке и о понятиях, имеющих конкретные модели. (О том, до какой степени неизвестны математические модели, я убедился из передачи одной уважаемой радиостанции. В студии экзаменовали юношу, который не знал, сколько ребер у куба. Всеведущий экзаменатор вынужден был сам ответить на свой вопрос и любезно сообщил экзаменуемому и всему земному шару, что у куба... 8 ребер.)

Впрочем, роль математика незавидна не только в том случае, когда ему приходится выступать публично, и не потому, что математика сложна и трудна. Причина в ином: математика слишком чужда неспециалистам и далека от их интересов. Даже физик или химик могут скорее рассчитывать на сочувственное внимание специалистов. Во Вроцлаве есть улица Врублевского. Если кто-нибудь спросит, чем заслужил такую честь



краковский ученый, то ему могут ответить, что Врублевский первым произвел сжижение воздуха и что его открытие применяется на практике в современных холодильных установках, в которых понижение температуры достигается нагреванием аммиака. Может быть, для того, кто выслушивает такое объяснение, останутся неясными пути, ведущие от эксперимента Врублевского к такому парадоксальному следствию из начал термодинамики, каким является современная холодильная установка, но он поймет, о чем идет речь, и согласится с тем, что улица по праву названа именем этого физика. Иначе обстоит дело с улицей Банаха. За исключением немногих специалистов, никто не знает, чем Банах заслужил столь высокую честь, а если бы кто-нибудь из прохожих спросил об этом у математика, то спрошенный вряд ли сумел бы найти слова, доступные пониманию любопытного прохожего.

Представим себе, что наш прохожий по профессии журналист. Не пав духом от постигшей его неудачи, журналист решил пополнить свою картотеку вырезками из газет и собрать все доступные сведения, чтобы по возможности быстрее решить, кто и почему имеет право называться математиком. Раздел «Мат.» в его картотеке начал быстро расти. Там оказалось официальное сообщение о том, что «в текущем году все университеты принимали студентов на математические факультеты без ограничения числа мест, в то время как число мест почти на всех других факультетах было ограничено». Из польского журнала «Космос» наш журналист вырезал корреспонденцию о письме, с которым обратились в высокие инстанции учащиеся одной краковской школы с просьбой отменить преподавание математики в школах, поскольку математика, по их мнению, ни для чего не нужна. Может быть, ему на глаза попался комплект лондонского еженедельника «Обсервер», и тогда его картотека пополнилась объявлениями фабрик, которым требуются математики (читая их, журналист решит, что в Англии, по-видимому, мало математиков, раз объявления сулят им великолепные условия). Заинтересовавшись, велик ли спрос на математиков в Польше, он обратится к отечественной прессе... и не встретит ни одного такого объявления. Зато в приложении к газете «Трибуна люду» он обнаружит выдержки из трактата

Котарбинского «О хорошей работе» и почерпнет из них следующее мнение: «... Современная тенденция развития личности придает большее значение способностям индивидуума, направленным к повышению его интеллектуального уровня, и отдает предпочтение быстроте мышления и знаниям по сравнению со способностями, носящими преимущественно характер различных манипуляций». Мысли, облеченные в столь научную форму, заставят нашего журналиста задуматься над тем, какой же вывод напрашивается: много ли теперь математиков или, наоборот, мало.

Решив во что бы то ни стало установить истину, журналист возьмется за американскую периодику и на страницах одного из номеров журнала *American Mathematical Monthly* найдет статью Р. Э. Гаскелла о практике математики. Автор поведаст ему, что практика существенно зависит от того, для чего, по мнению широкой публики, нужны математика и математики. «К счастью, — пишет далее Гаскелл, — многие математические результаты уже нашли себе рынки сбыта, но большинство людей по-прежнему не имеет ни малейшего представления ни о том, что такое математика, ни о ее возможностях. Более того, это невежество не только распространено, но и представляет собой весьма сильную, агрессивную и заразную разновидность невежества... Одни полагают, будто математику легче, чем другим, запомнить карты, которые «вышли», при игре в бридж. Другие не видят разницы между математиком и бухгалтером. Инженеры и некоторые специалисты отождествляют математику с формулами, чертежами, графиками и вычислительными машинами...»

Продолжая свои поиски, наш дотошный журналист может случайно наткнуться на заметку о Стефане Банахе, помещенную в 1946 г. в «Бюллетене Американского математического общества». Она невелика по объему, но имеет прямое отношение к интересующему журналиста вопросу и не лишена интереса. В ней не так уж много утверждений, непонятных для неспециалиста, но именно в них кроется ответ на вопрос, почему и поныне в каждом математическом журнале можно встретить имя Банаха (потому, что так называемое банахово пространство стало одним из основных понятий и число работ, в которых оно используется, все возрастает),

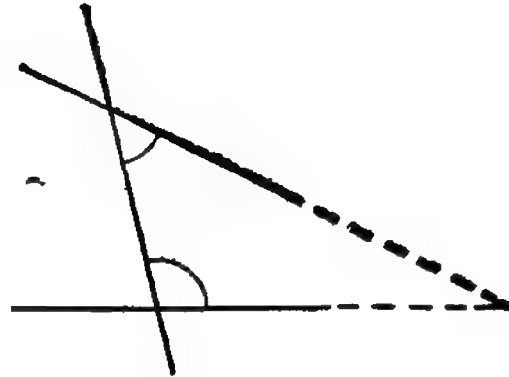
На страницах математических журналов наш коллекционер, возможно, встретит и упоминание о теореме Банаха — Тарского, утверждающей, что шар можно разделить на несколько частей, из которых затем сложить другой шар большего радиуса, чем первый. Теорема Банаха — Тарского до сих пор не нашла ни одного применения и, быть может, не найдет их никогда... И хотя у любого физика она вызывает протест, ее можно доказать с помощью логических рассуждений, исходя из аксиом евклидовой геометрии, причем рассуждения эти ничем не будут отличаться от рассуждений, неоднократно использованных другими математиками...

Невольно вспоминается вопрос, заданный мне зоологом. В несколько гротескном виде его можно было бы сформулировать так: «Почему Евклид не знал теоремы Банаха — Тарского?»

Евклид был первым математиком в высоком смысле этого слова. Он стал создателем геометрии, той элементарной геометрии, которой учили детей римских патрициев греческие учителя, той геометрии, которую до недавнего времени в английских школах называли просто — «Евклид», той геометрии, которую нам всем вбивали в головы с большим или меньшим успехом, именно той геометрии, на отмене которой настаивают краковские лодыри.

Заглянем в книги самого Евклида с надлежащим почтением, поскольку они написаны за 300 лет до н. э. в Александрии, бывшей в то время центром эллинской культуры. По-гречески сочинение Евклида называется «Стнохейя», после перевода на латынь его стали называть «Элементы». Начинается оно с определений, затем идут аксиомы, которые делятся на две группы. К первой группе относятся коннаи энноэиан, или общепризнанные свойства некоторых основных соотношений. Она несколько напоминает основания современной теории множеств. Вторая группа аксиом начинается с глагола в повелительном наклонении *aitestho*, что в переводе означает «следует принять» или «примем, что...». Это так называемые постулаты. Их введение показывает, что Евклид ясно сознавал роль соглашений (типа «условимся считать, что...») и даже их неизбежность в основаниях геометрии. Пятнадцать книг содержат несколько сот теорем, каждая из которых логически следует из

определений и аксиом и снабжена доказательством. Однако совершенство евклидовой системы выяснила лишь современная математика, и история этого открытия поистине захватывающая.



Еще древним, в том числе великому Птолемею, отцу астрономии, жившему так же, как и Евклид, в Александрии, не нравился постулат о параллельных, гласивший: две прямые на плоскости, пересекающие одну и ту же третью прямую и образующие с ней углы, сумма которых меньше полного угла, пересекаются между собой.

Этот постулат, названный позднее XI постулатом, древние считали слишком сложным и даже наносящим вред «Элементарам», поскольку он не был очевидным. Неоднократно предпринимались попытки вывести его из остальных аксиом, но всякий раз внимательные читатели обнаруживали ошибки, чаще всего сводившиеся к замене XI постулата какой-нибудь новой эквивалентной ему аксиомой. Бесплодные попытки доказать XI постулат Евклида продолжались до начала XIX в., пока в 1825 г. трое гениальных людей независимо друг от друга не покорили эту ранее недоступную вершину геометрии. Ими были Лобачевский, Бойяи младший и Гаусс.

Семья Бойяи происходила из Семиграда, откуда и переселился в Венгрию — в Марош-Вашаргей — Кашпар Бойяи де Бойя. Его сын Фаркаш был необычным и разносторонне одаренным ребенком. В XVIII в. семиградская аристократия придерживалась обыкновения посылать своих сыновей для получения образования в Германию. Благодаря помощи семиградских баронов обедневший Кашпар также смог послать своего сына в Геттинген. Фаркашу исполнился 21 год, когда он встретился с Гауссом, который был моложе его на 2 года. Когда мать Гаусса спросила как-то у Фаркаша, кем станет ее сын, тот без промедления ответил: «Величайшим математиком Европы!» Уже в то время и Гаусс, и Бойяи размышляли над XI постулатом.

Спустя несколько лет Гаусс вернулся в Брауншвейг и погрузился в работу, которая охватывала различные

разделы математики, механику, теорию электричества, астрономию и геодезию. Наградив молодого ученого титулом «князя математиков», она не принесла ему никакого материального вознаграждения и возбудила недовольство родни. Коллега Гаусса Бойяи возвратился в Марош-Вашаргей и, чтобы заработать на жизнь, стал профессором математики, а впоследствии и ректором одного из местных учебных заведений, по-прежнему поддерживая дружеские отношения с князем математиков. Бойяи был буквально одержим XI постулатом и предпринимал одну за другой попытки доказать его, но вскоре сам же отвергал собственные доказательства. В 1804 г. Ф. Бойяи послал Гауссу последний вариант работы об XI постулате под названием «Геттингенская теория параллельных» с просьбой сообщить отзыв. Гаусс вскоре ответил ему весьма дружески и подробно, что сам хотел бы развязать этот гордиев узел, но все его усилия пока ни к чему не приводят. Доказательство XI постулата, содержавшееся в «Геттингенской теории параллельных», по мнению Гаусса, также было недостаточным. Ошибка Бойяи состояла в том, что он воспользовался тем же рассуждением, из которого Зенон Элейский вывел свою знаменитую апорию «Ахилл быстроногий не может догнать черепаху».

У Фаркаша был сын Янош. Из писем Фаркаша к Гауссу известно, что 15-летний Янош окончил училище в Марош-Вашаргей, знал дифференциальное и интегральное исчисление и решал сложные задачи по аналитической механике. В возрасте 10 лет Янош играл первую скрипку в квартетах, сочинял музыку и, как и его отец, был превосходным знатоком латыни. Мечтой юного Бойяи было остаться дома и заняться математикой, но недостаток средств вынудил Яноша обратиться за помощью к знакомым. Один из семиградских друзей семьи Бойяи вызвался в течение четырех лет вместе с платой за учение нести все расходы, если Янош поступит в Военную академию в Вене. Янош Бойяи окончил академию в чине подпоручика и стал блестящим офицером. Высокий брюнет с темно-голубыми глазами, прекрасный наездник, лучший математик не только своего выпуска, но и всей академии, искусный фехтовальщик, перерубавший железные крюки одним ударом своей сабли из дамаского булата, Янош был предметом

неустанных забот отца, в многочисленных письмах предостерегавшего сына от дуэлей и женщин. Но еще настойчивее Фаркаш Бойяи предостерегал своего сына от попыток доказать XI постулат. Приведем отрывок из его письма, написанного в 1820 г.: «Не становись на этот путь — мне хорошо известно, что ему нет конца. Я испытал на себе эту ночь без дня. Все светлое, вся радость моей жизни погасли в ней. Богом тебя прошу, оставь в покое теорию параллельных». И через несколько строк снова: «Я хотел посвятить себя служению истине, стать мучеником, лишь бы избавить человеческий род от этого пятна...» В том же письме несколько дальше читаем: «Именно в этом корень всех позднейших ошибок и заблуждений». И наконец: «Столбы Геркулеса стоят в тех местах. Не делай далее ни шагу, иначе пропадешь».

Так Фаркаш Бойяи ответил на письмо Яноша, который весной 1820 г. сообщил отцу из Вены о своих первых попытках доказать XI постулат. Отцовский запрет лишь еще больше подстегнул самолюбие молодого офицера, решившего любой ценой проникнуть в тайны параллельных. В 1823 г. он записывает на четвертушке бумаги: «...Я открыл столь удивительные вещи, что не верю самому себе... Пока я могу сказать только одно: из ничего я построил новый, иной мир». Когда Янош в 1825 г. приехал к отцу в Марош-Вашаргей, абсолютная геометрия (как назвал ее Янош Бойяи) уже была открыта. Затем наступил период разочарований. Во-первых, отец никак не мог понять, что существует бесконечно много различных геометрий, удовлетворяющих всем аксиомам евклидовой геометрии, кроме XI постулата, и что вопрос о том, истинен или ложен этот постулат, не имеет смысла, поскольку как сам постулат, так и его отрицание вместе с остальными аксиомами евклидовой геометрии образуют непротиворечивые системы. Когда в 1830 г. Яноша перевели из гарнизона в Темешваре во Львов, он решил воспользоваться посредничеством отца и отправить работу на отзыв Гауссу, но рукопись пропала. Лишь второй, улучшенный вариант работы в 1832 г. достиг Геттингена. Гаусс ответил, что выводы Бойяи младшего согласуются с его собственными представлениями по поводу постулата о параллельных, над которым он размышлял в течение последних 30 лет. Меня радует, — добавил Гаусс, — что сын старого друга



меня опередил». В письме к другому своему другу Гаусс называет Яноша гением первой величины и признает, что его собственные идеи были далеки от той зрелости, какой удалось достичь Бойяи младшему. Но и столь лестный отзыв князя математиков не удовлетворил честолюбия Яноша. Он не поверил в искренность Гаусса и стал подозревать, что его отец выдал старому другу тайны геометрии. Столь недостойное подозрение отдалило Яноша от обоих подозреваемых, как никто другой понимавших проблему параллельных и ее важность. Разумеется, в окружении молодого Бойяи не нашлось никого, кто мог бы заменить ему Гаусса и отца. Янош замкнулся, стал раздражительным, и даже вызвал отца на дуэль. В характеристике, написанной начальником Яноша, о его поведении говорится следующее: «...В 1832 г. получил похвальный отзыв на свою брошюру от придворного советника Гаусса, одного из знаменитейших математиков... Может исполнять обязанности профессора математики...» И далее: «...скуп на слова, драчлив, шумен, избегает общества товарищей-офицеров, к инженерной службе относится без особого рвения, прекрасный шахматист...»

Бойяи вышел в отставку в 1833 г. Его дальнейшая судьба — это история одинокого человека, испортившего отношения с родными и близкими. Из блестящего офицера Бойяи превратился в дряхлого чудака, авантюриста, на которого указывали пальцем. Единственной отрадой его были скрипка и математика. Когда Янош Бойяи умер в Семиграде в 1860 г., никто не знал, что скончался один из величайших гениев мысли.

Говоря о математике, какой она была вчера и какой стала сегодня, Фаркаша Бойяи следует считать представителем вчерашней математики, а его сына, так же как и Лобачевского, открывшего неевклидову геометрию одновременно с Бойяи младшим и Гауссом, — представителем современной математики. Незнание русского языка на Западе привело к тому, что работы Лобачевского, написанные в Казани, очень поздно достигли Германии и других стран Европы.

На чем же основана неевклидова геометрия? Неевклидова геометрия — это ни доказательство утверждения о том, что через точку вне прямой проходит лишь одна прямая, параллельная данной, ни доказательство



утверждения о том, что число прямых, проходящих через точку вне прямой и параллельных ей, больше одной. В приложении к сочинению своего отца «Тентамен» Янош Бойяи доказал, что утверждение о единственной параллельной, проходящей через точку вне прямой, и утверждение о нескольких параллельных не противоречат остальным аксиомам и что Евклид имел право поместить XI постулат среди прочих аксиом геометрии. Изъяв XI постулат, мы получили бы так называемую пангеометрию. Заменяв XI постулат его отрицанием (постулатом о неединственной прямой, которую можно провести через точку, лежащую вне прямой, параллельно этой прямой), мы получили бы неевклидову геометрию Лобачевского — Бойяи. Современная математическая логика пошла еще дальше. Ее выдающийся представитель Курт Гёдель доказал, что «пятно на творении создателя», о котором упоминал Фаркаш Бойяи, является свойством, присущим любой системе аксиом. Ни одна система аксиом не полна, в каждой системе всегда можно сформулировать утверждение, которое в рамках данной системы нельзя будет ни доказать, ни опровергнуть.

Почему открытие неевклидовых геометрий, и поныне неизвестных даже образованным людям, если только они не математики, следует считать решающим в истории науки? Стоит ли придавать значение открытиям, сущность которых можно с трудом объяснить ничтожной доле процента всех образованных людей? Элементарная геометрия, кодифицированная Евклидом, привычна. Ее можно преподавать в обычных школах, и значительная часть молодежи ее усваивает. Она позволяет точно описывать свойства твердых тел и объяснять простейшие оптические явления. Интуитивные основы сочинения Евклида почерпнуты либо из опыта многих поколений, либо из накопленных в течение жизни знаний о поведении твердых тел. Аксиомы евклидовой геометрии — это не что иное, как более строгая формулировка сведений о пространстве, добытых «на глаз и на ощупь». Этим и объясняется, почему неевклидовы геометрии долгое время пользовались репутацией диковинных существ, придуманных учеными специально для того, чтобы усложнить и затемнить простые и ясные вещи.

Риман не только существенно развил неевклидову геометрию, но и высказал убеждение в возможности такой физики, для которой старая геометрия окажется недостаточной. Продолжателем идей Римана стал Альберт Эйнштейн, с готовностью воспринявший неевклидову геометрию. Так называемая специальная теория относительности объяснила эксперимент Майкельсона, который показал, что движение Земли вокруг Солнца не влияет на оптические явления, наблюдаемые с помощью системы связанных с Землей линз и зеркал. Эксперимент Майкельсона нанес сокрушительный удар идее абсолютного пространства. Специальная теория относительности произвела в физике такую же революцию, какую Лобачевский и Бойяи произвели в геометрии.

Многое соединяет прошлое с настоящим. Мы бегло проследили лишь одну линию, ведущую от Евклида через Лобачевского и Яноша Бойяи к современной физике. По-видимому, наиболее интересным среди многочисленных читателей Евклида был Блез Паскаль. Еще в раннем детстве Паскаль самостоятельно доказал несколько евклидовых теорем, за что получил в подарок «Элементы» Евклида. В работах Паскаля встречается альтернатива *esprit de géométrie* — *esprit de finesse*\*, подчеркивающая различие между духом математики и духом гуманитарных наук, но сам Паскаль сочетал в себе оба начала.

В молодости Паскаль часто бывал в компании игроков. В 1654 г. в знаменитом письме, адресованном одному из бывших компаньонов, Паскаль изложил некоторые идеи теории вероятностей, возникшей первоначально как теория вычисления шансов на выигрыш и справедливого раздела ставки в азартных играх. Более важное значение теория вероятностей приобрела лишь тогда, когда ее применили к совсем иной модели, не имеющей ничего общего с игровой костью. Этой моделью был рой дробинok — так представляли себе газ Дж. К. Максвелл, Л. Больцман и М. Смолуховский. За полвека, предшествовавшего первой мировой войне, эти ученые создали так называемую кинетическую теорию материи. Утверждения теории вероятностей, приме-

---

\* Дух математики — дух изящных искусств (фр.).

ненные к мириадам невидимых материальных шариков, позволили вывести те газовые законы, которые давно были экспериментально открыты физиками. Законы эти первоначально были открыты без всякой математики, из непосредственных наблюдений газа, находящегося в замкнутом сосуде и подогреваемого или сжимаемого поршнем. О чем, собственно, шла речь? О проверке термодинамики и механики. Создатели кинетической теории стремились показать, что механика, позволяющая столь точно описывать движение огромной планеты, позволяет с не меньшим успехом предсказывать траектории целого роя дробинок в замкнутом сосуде. Они хотели найти математическое доказательство универсальности механики Ньютона. Известно, что механика позволяет заранее вычислить траекторию снаряда, если известны его начальное положение и начальная скорость, но получить такую информацию о каждой молекуле газа невозможно. Однако поскольку мы не в состоянии вычислить траекторию каждой из миллиардов молекул газа в отдельности (а если бы и могли, то все равно не сумели бы извлечь из хаоса чисел никакого общего физического закона), то нам не остается ничего другого, как, воспользовавшись теорией вероятностей, вычислить средние скорости молекул или средний импульс, передаваемый ими поршню, который закрывает газ в цилиндре. Достичь успеха помог так называемый закон больших чисел. Божок, которому поклонялись, перебрался с зеленого стола для азартных игр на письменный стол физика-теоретика. Этот божок — так называемый «случай». В течение последних 30 лет выяснилось, что, исключив столь неопределенное понятие, как случай, можно далеко продвинуться в построении строгой, математической теории вероятностей. Более того, возможно теорию вероятностей на радость ортодоксальным детерминистам вообще удастся изгнать из классической физики, однако в новой квантовой теории ее корни уходят значительно глубже. Во всяком случае «изгнание» теории вероятностей (так же как и объяснение, почему это невозможно) — дело математиков.

Говоря о современной математике, нельзя не упомянуть о вычислительных машинах. Когда Паскаль построил свою первую вычислительную машину, это была лишь забавная игрушка, поскольку она нигде не нашла

себе практического применения. Ее слабой (слабой в буквальном смысле слова) стороной были... *зубья*. Во времена Паскаля еще не умели находить контуры зубьев передаточных шестерен и поэтому пользовались примитивными колесиками со штифтами, расположенными на ободе. При быстром вращении колесиков штифты ломались. Когда научились делать шестерни с циклоидальным профилем зубьев, появилась возможность строить вычислительные машины, пригодные для использования на практике. Но подлинную революцию в вычислительной технике произвели не зубчатые шестерни, а электронные лампы.

В вычислительной машине электронная лампа играет роль обыкновенного выключателя: она либо пропускает ток, либо прерывает его. Ни один выключатель не может менять свое состояние миллион раз в минуту, а электронная лампа может, потому что инерция электронов ничтожно мала по сравнению с инерцией самых лучших механических элементов. Вы спросите, к чему такая спешка? По-видимому, такие скорости не нужны для расчетов, которые изо дня в день проводятся в конструкторских бюро или банках, но они необходимы в тех случаях, где требуется проделать необычайно громоздкие выкладки. Простейшим примером расчетов подобного типа может служить составление таблицы стрельб. Нетрудно вычислить, где будет находиться артиллерийский снаряд через  $1/100$  с после выстрела и какую скорость он будет иметь с учетом сопротивления воздуха. Произведя все расчеты, мы получим четыре числа. Пользуясь теми же формулами, по этим четырем числам можно найти четыре других числа, определяющие положение и скорость снаряда еще через  $1/100$  с. Схема вычислений остается неизменной. Повторив все операции несколько тысяч раз, мы найдем всю траекторию снаряда. Поскольку каждому углу возвышения соответствует своя траектория, для составления достаточно полных таблиц необходимо просчитать сотни траекторий. Для решения столь громоздкой задачи нам и понадобится быстродействующая машина, способная за несколько часов проделать все операции.

К чему сводится роль математика, имеющего доступ к быстродействующей машине? Его насущный хлеб — составление программ для решения таких задач, как

составление таблицы стрельб. Современные машины универсальны, поэтому перед математиком могут возникать задачи и совершенно иного типа, например составление программы, позволяющей машине играть в шахматы против живого партнера.

Современные вычислительные машины служат одним из примеров того, как техника оказывает существенное влияние на развитие математики, точнее на направление, в котором развиваются математические идеи. Однако влияние техники не следует переоценивать: в отличие от биологии, где приборы имеют решающее значение, помощь, оказываемая математику вычислительными машинами, — это помощь извне, помощь со стороны аппаратуры. Математика же развивается по своим собственным, автономным законам, и на вопрос нашего зоолога следовало бы ответить, что прогресс математики происходит совсем иначе, чем прогресс естественных и гуманитарных наук. Математика развивается по восходящей линии, минуя все заторы, ее развитие напоминает развитие живого организма. К тому же в математике несравненно явственней, чем в других дисциплинах, ощущается, насколько растянуто шествие всего человечества.

Среди наших современников есть люди, чьи познания в математике относятся к эпохе более древней, чем египетские пирамиды, и они составляют подавляющее большинство. Математические познания незначительной части людей дошли до эпохи средних веков, а уровня математики XVIII в. не достигает и один человек на тысячу. Выяснилось, что, желая превратить первобытного человека в математика, мы не можем рассчитывать на эволюцию. Человеческий мозг нельзя перестроить мановением волшебной палочки. Чтобы из пещерного человека сделать Паскаля, нам придется снова проводить поколение за поколением тернистым путем, который нигде нельзя сократить. „В математике нет царской «тропы»“, — говорили древние. Но расстояние между теми, кто идет в авангарде, и необозримой массой путников все возрастает, процессия все растягивается, и идущие впереди удаляются все больше и больше. Они скрываются из виду, их мало кто знает, о них рассказывают удивительнейшие истории. Находятся и такие, кто просто не верит в их существование...

Многие математики уверовали в то, что строгость — философский камень математики, а поскольку ни физика, ни другие естественные науки не могут мечтать о такой строгости, то математики с презрением отвернулись от них и философский камень превратился в камень обиды. Широкая публика узнала вскоре от обиженных и оскорбленных, что математика ни для чего не нужна. Владельцы философского камня не опровергли этого мнения.

Разные люди относятся к математике по-разному: одни «активно» ее принимают, другие менее агрессивны, но редко кто понимает, что такое математика и каковы ее реальные возможности. Даже те, кто относится к математике равнодушно, знают о ней не больше, чем дети. Одни убеждены в том, что математики очень любят заниматься вычислениями, выучивают наизусть таблицы логарифмов и соревнуются в быстроте счета с вычислительными машинами. Другие считают математику «философией», чем-то вроде числовой магии, озаренной мистическим отблеском бесконечности и утратившей всякий контакт с бухгалтерской арифметикой — единственной отраслью математики, имеющей, по их мнению, практическое значение.

Существует и третья разновидность людей, имеющих о математике превратное представление. Они рассматривают математику как разновидность пасьянса. В подтверждение своей точки зрения они могли бы сослаться на авторитет профессора Сорбонны Лорана Шварца, опубликовавшего в свое время статью «Тенденции современной математики». Взгляды профессора Шварца не новы. Они давно известны математикам моего поколения и принесли немало вреда.

Уже во введении Лоран Шварц заявляет, что «ныне математика обрела независимость, и лишь традиционная манера изложения хранит черты того, чем математика была еще недавно, — чем-то вроде экспериментальной физики». И далее «Математика — наиболее абстрактная и в то же время наиболее независимая от внешнего мира наука, поэтому говорить о современной математике с нематематиками практически почти невозможно...»



Тот, кто уверует в тезис профессора Шварца, вынужден будет прийти к заключению, что лишь современная математика в полной мере заслуживает свое название, вчерашняя математика может называться математикой с известной натяжкой, а математиков, чьи имена мы назвали выше, вообще следует лишить этого титула так же, как алхимиков — права называться химиками, а астрологов — астрономами.

Каждый согласится, что экспериментальная физика и другие естественные науки принципиально отличаются от математики. Действительно, если кто-нибудь вздумает доказывать теорему Пифагора, измеряя линейкой стороны прямоугольных треугольников, и после множества измерений заявит, что сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы с средней ошибкой 0,3%, то и по методу, и по результату его занятие в одинаковой степени можно назвать экспериментальной физикой. Но Шварц имеет в виду нечто иное. Он говорит, что с древности и до нашего времени те, кто занимался геометрией, применяли метод, который пользовался репутацией строгого, но в действительности таковым не являлся, да и не мог быть, ибо при доказательстве утверждений о свойствах геометрических объектов использовались кое-какие наглядные геометрические свойства этих объектов. Но разве не греческие ученые Пифагор, Платон и Евклид со всей определенностью отвергли попытки экспериментального «нащупывания» геометрической истины? Разве не они приписывали ей высшую степень объективности в отличие от наших ощущений, подверженных иллюзиям и создающих у каждого ежминутно меняющийся образ внешнего мира? Можно ли вообще найти лучшее алиби, чем то обстоятельство, что никто из тех «физиков-экспериментаторов», о которых говорит Лоран Шварц, не открыл ничего нового в физике?

Желая разобраться в том, что имеет в виду Лоран Шварц, говоря о математической строгости, обратимся к эпохе, которую он явно считает критической — к концу XIX в. «Плоская замкнутая и несамопересекающаяся кривая делит плоскость на две области так, что всякая непрерывная дуга, соединяющая точку, лежащую в одной области, с точкой, лежащей в другой области, пересекает эту кривую» — до 1892 г. это утверждение считалось очевидным. Лишь в 1892 г. Камиль Жордан



(профессор Эколь Политехник) понял, что свойство замкнутых кривых, о котором говорится в этом утверждении, составляет содержание особой теоремы и, следовательно, требует доказательства. Однако в предложенном самим Жорданом доказательстве имелись пробелы, и лишь в 1902 г. Веблен дополнил рассуждения Жордана. Для профессора Шварца предшественники Жордана, которые, не задумываясь, писали: «Пусть  $C$  — произвольная замкнутая кривая, а  $V$  — область, заключенная внутри  $C$ » — не были математиками, поскольку непосредственно из очевидного свойства замкнутой выпуклой кривой делали заключение о существовании области  $V$ , но зато математиком был Веблен. То, что Шварц называет строгостью, начинается, по-видимому, с Гильберта, который впервые поставил вопрос радикально: запретил усматривать в геометрических понятиях (например, точка, прямая и т. д.) и в геометрических отношениях (например, «точка  $P$  лежит на прямой») какой-либо смысл, кроме того, который в явном виде сформулирован в аксиомах и определениях. После выхода «Оснований геометрии» Гильберта стало анахронизмом ассоциировать с понятиями «точка», «прямая», «плоскость» и т. п. свойства, подсказываемые рисунком или пространственным воображением, и те, кто нарушает запрет, «перестают быть математиками в современном значении этого слова». Но у Гильберта были предшественники. Еще в середине XIX в. (и, следовательно, за 50 лет до появления «Оснований геометрии» Гильберта) Риман проанализировал гипотезы, лежащие в основании геометрии, в работе, которая содержала первые ростки идей теории относительности, развитых в начале нашего века Альбертом Эйнштейном. В открытии неевклидовой геометрии Римана на четверть века опередили Лобачевский и Янош Бойяи. Из писем Гаусса следует, что идеи неевклидовой геометрии не были чужды и ему. Чтобы понять, каким образом существуют различные геометрии, необходимо согласиться с допустимостью различных аксиоматических систем. Каждая из таких систем сама по себе непротиворечива, но содержание аксиом одной системы противоречит содержанию аксиом другой системы. Если бы предшественники Гильберта верили в существование «истинного» геометрического пространства и в то, что точки, прямые и плоскости этого пространства обладают

свойствами, которые следует изучать, а не нарушать произвольно декретами, известными под названием аксиом и лишенными «материального» значения, то они никогда не открыли бы геометрий, отличных от евклидовой.

Свою точку зрения Лоран Шварц формулирует предельно ясно: «...Математик прежде всего должен принять некоторое число аксиом, служащих в известной мере правилами игры. Из этих аксиом математик выводит теоремы, которые строго доказывает. Так, шахматист сначала устанавливает совершенно произвольные и не поддающиеся доказательству правила игры в шахматы и лишь затем обретает возможность разыгрывать партию...»

Но разве так поступал праотец геометров Евклид? Открыв книгу У. Демпнера «История науки» (глава «История точных наук»), мы прочитаем следующее: «Евклид из Александрии (около 300 г. до н. э.) собрал, развил и систематизировал существовавшие геометрические знания. Из немногих аксиом, принятых за очевидные свойства пространства, он, опираясь на законы логики, вывел чудесную цепочку теорем методом, который вплоть до нашего времени оставался единственно признанным». И действительно, до конца XIX в. элементарную геометрию в английских школах называли просто «Евклид». Александрийский мудрец сформулировал в начале своей книги «правила игры» и неукоснительно придерживался их. Почему же профессор Шварц столь не милостив к Евклиду, что даже не удостоил его звания математика? Прочитаем еще раз то место из книги сэра Уильяма Демпнера, где он кратко описывает основные особенности сочинения Евклида: «...Из немногих аксиом, *принятых за очевидные свойства пространства...*» Дальше читать не нужно, ибо и этих слов достаточно, чтобы дисквалифицировать одного из величайших ученых. Евклид верил, что идеальным прямым и точкам, о которых говорится в его аксиомах и теоремах, соответствует некая реальность. Если бы он знал, что аксиомы можно выбирать, заменять, придумывать и переопределять, то, вероятнее всего, отверг бы науку как игрушку, недостойную философа, но на свое счастье Евклид не дожил до эпохи Бельтрами и Гильберта. Геометрия по-гречески означает «измерение земли». Это первоначальное

значение слова далеко от всякой игры, даже от игры в шахматы или в математические доказательства.

Что же такое пресловутая строгость, тот философский камень, который был найден лишь в наше время? Мы отнюдь не склонны пренебрежительно относиться к строгости! Сколько раз легкомысленное игнорирование сомнительных деталей доказательства со стороны математика, полагающегося на свою интуицию, приводило к совершенно ошибочным результатам: выяснялось, что столь легко восполнимые (на первый взгляд) элементы в логической цепочке не удастся ничем заменить, поскольку сам доказываемый тезис ложен. Умение формулировать истинные утверждения, а затем находить их доказательства составляет исключительную привилегию выдающихся мастеров «математического цеха», но и они не злоупотребляют своим даром, а подвергают высказанные утверждения проверке доказательством и лишь потом провозглашают их математическими истинами.

Математическая строгость в том виде, как ее понимает профессор Шварц, несомненно является достижением нашего времени. Это открытие аналогично тем, которыми гордятся другие науки, например биология, в особенности такой ее раздел, как биохимия. Давно известно, что химические процессы, происходящие в живом организме, обладают спецификой и, следовательно, принципиально отличны от тех, которые происходят в неживой материи. Правда, еще в прошлом веке Геннел синтезировал искусственный этиловый спирт, а Велер — искусственную мочевины, однако неизмеримо более сложный химизм живых существ по сравнению с жалким уровнем явлений, которые удалось воспроизвести *in vitro*, то есть в пробирке, наполненной стерилизованной материей, вплоть до XX в. поддерживал веру в дуализм химии, и было бы трудно указать день и час, когда эта вера уступила место пониманию того, что есть лишь одна химия, хотя за сотни лет до этого появились философы, провозгласившие единство материи. Аналогично обстояло дело и с обоснованием математики с тем лишь различием, что эволюция взглядов началась еще в древности. Греческая математика достигла уровня строгости, остававшегося непревзойденным до XIX в. Известные открытия, происшедшие во второй половине XVII в. и положившие начало так называемой высшей матема-

тике, не были связаны с обоснованием фундаментальных положений и очищением математического метода от нестрогости. Никто не ощущал потребности в «устрожении», ибо в элементарной математике, унаследованной от греков, никто из тех, кто шел вслед за Евклидом, не встретил противоречия. Декарт, Лейбниц и Ньютон, Гюйгенс и братья Бернулли, Иоганн и Яков, обязаны своим гениальным открытиям умению читать в книге, доступной взору, но не разумению каждого. Называется эта книга **ДЕЙСТВИТЕЛЬНОСТЬЮ**, но лишь избранным дано понимать ее язык. Именно склонный к логике Лейбниц ввел в математику через понятия дифференциала и бесконечно малой величины нестрогость, чреватую весьма опасными последствиями. Парадоксы, связанные с этими понятиями и с суммированием бесконечных рядов, перестали беспокоить ученых лишь во второй половине XIX в. Ньютон тоже не заботился о строгости. Пользуясь методами дифференциального и интегрального исчисления, Ньютон и его последователи завоевывали новые области дифференциальной геометрии, анализа, механики твердого тела и жидкости, и у них просто не было времени заботиться об обосновании каждого сделанного шага (так же как открыватели новых земель редко останавливаются перед юридическим обоснованием причин своего вторжения на чужую территорию). Своим ученикам, которые никак не могли понять основ дифференциального исчисления, Лагранж говорил: «Только вперед! Смелее! Вера придет потом!» Предпринятые им самим попытки обосновать новое исчисление окончились неудачей, но Коши уже умел правильно оперировать понятиями предела и сходимости, а Риман построил строгую теорию определенного интеграла и ввел современное определение функции как соответствия между множествами чисел  $x$  и  $y$ , отказавшись от расплывчатого понятия функции как аналитического выражения. Сегодня нам кажется удивительным, что Коши и Риман, бывшие одновременно творцами и критиками, не ощущали потребности в точном определении понятия действительного числа. Вскоре после Римана заблистал Вейерштрасс, и поныне оставшийся непревзойденным по строгости. Именно он был первым, кто правильно доказал, что непрерывная функция, всюду отличная от нуля, должна везде иметь один и тот же знак. И лишь

в 1888 г. Дедекин<sup>д</sup>д создал современную теорию действительных чисел, удовлетворяющую всем требованиям логической строгости. В наше время эти открытия принято излагать в обратной последовательности: от сечений Дедекин<sup>д</sup>да через теорему Вейерштрасса к интегралу Римана и равномерной сходимости Коши. Какую же дату должен считать переломной историк математики? Когда математика вдруг перестала быть «чем-то вроде экспериментальной физики» и превратилась в игру по раз и навсегда установленным правилам, причем таким, смысл которых недоступен для всех, за исключением узкого круга посвященных?

Посвященные тесным кольцом окружают источник строгости, под которым виднеется подпись БУРБАКИ. Это коллективный псевдоним группы французских математиков, систематически излагающих анализ от самых основ с соблюдением всех требований современной строгости, то есть той строгости, которую рекомендует нам в качестве образца профессор Шварц в своей статье. Этот священный «орден» на протяжении многих лет с удивительной настойчивостью и последовательностью закладывает камень за камнем фундамент под здание современной математики. Да, да, я не оговорился. Здание стоит, а они кладут под ним фундамент!

Профессор Шварц не ограничился постулатом полной и явной кодификации математики. Помимо этого постулата, он сформулировал постулат свободы творчества: любая система аксиом хороша, каждая система определяет свою игру, следует лишь выбрать ту, которая больше нравится, и разыгрывать интересные партии — вот тогда человек и становится истинным математиком! Сравнение математики с шахматами небезопасно для тезиса Шварца, пользующегося этим сравнением лишь для большей наглядности в переносном смысле. Небезопасно же оно потому, что игра с четко установленными правилами по самой идее тезиса служит не сравнением и не риторической аналогией, а самым настоящим примером. Действительно, правила игры в шахматы можно рассматривать как непротиворечивую систему аксиом, каждую концовку, например пятиходовку, — как математическую задачу в смысле Шварца, решение пятиходовки можно считать доказательством теоремы о том, что позиция на шахматной доске дей-



ствительно пятиходовка, то есть существует метод игры для белых, который независимо от ответных ходов черных не позже чем на пятом ходу белых приводит к их выигрышу, и одновременно не существует метода игры для черных, который бы независимо от ходов белых позволил бы черным продолжать игру до пятого хода включительно. При такой точке зрения всех шахматных композиторов — авторов концовок — нельзя не признать творчески мыслящими математиками в смысле Шварца. Как известно, этой «математической» теории нельзя отказать ни в эстетической ценности, ни в том, что она выдержала проверку временем. Нельзя отрицать, что эта игра интересна и имеет много любителей во всем мире. Строгость ее правил безупречна. Никому и в голову не придет попытаться вывести утверждение о том, что в любом начальном положении король и ладья обладают преимуществом по сравнению с изолированным королем, из внешних свойств фигур, то есть из их формы и материала. Следовательно, в шахматах нет и следа «экспериментальной физики». Недостает им лишь одной существенной черты: о них можно говорить с самым широким кругом людей, и даже непосвященные не видят в них ничего сверхъестественного, однако этот недостаток в действительности следует считать достоинством шахмат (если только Шварц не причислит недоступность к числу наиболее существенных черт математики — впрочем, мы отнюдь не собираемся приписывать ему такие намерения). В то же время каждому известно, что научное значение самой изящной шахматной пятиходовки равно нулю по сравнению с научным значением самой скромной теоремы элементарной геометрии, потому что игра, известная под названием геометрии, — это столкновение человека с окружающим миром, и каждая победа, одержанная в этой игре, имеет непреходящее значение для всего человеческого рода.

Во введении к книге В. Феллера «Введение в теорию вероятностей и ее приложения» утверждается следующее: «В каждой дисциплине мы должны заботиться о различении трех сторон теории: а) формального логического содержания; б) интуитивных представлений; в) приложений». Мне кажется, что сторонники Шварца сводят всю математику лишь к одному из этих трех аспектов, а именно к формальному логическому содер-

жанию. В эпоху специализации по каждому предмету существует свой эксперт. В вопросах строгости экспертами являются логики. Каждый, кому приходилось иметь дело с современными логиками, знает, как тщательно они стремятся отделить то, что говорится на языке, термины которого определены системой аксиом, от того, что говорится о самой системе (утверждения последнего типа не принадлежат к нашей системе аксиом, и основанная на ней теория не несет никакой ответственности за такие утверждения). Таким образом, и наше представление о геометрии, и то, что думает о ней Шварц, лежит за порогом геометрии и лишено математической санкции. К вещам, лежащим вне системы, то есть вне формализованной математической теории, прежде всего следует отнести предмет теории, о которой система ничего не говорит. Профессора Шварца не интересует предмет математики и еще в меньшей степени ее интуитивный фон и приложения, которые Феллер считает равноправными с формальной конструкцией математических теорий. Историческое развитие математики подтверждает первенство предмета: прямые, точки и плоскости существовали до того, как появилась геометрия, — не те прямые, точки и плоскости, которые имел в виду Гильберт, а реальные прямые, точки и плоскости, которые учитель демонстрирует своим ученикам, указывая на ребра, вершины и грани куба, сделанного из дерева или стекла. Именно они составляют предмет геометрии, и обладают приматом перед теорией так же, как розы — перед ботаникой и звезды — перед астрономией. Интуитивным фоном геометрии служат «естественные» знания об этих моделях, частично накопленные в детстве при непосредственном столкновении с такими моделями или подобными им предметами, а частично переданные по наследству, то есть врожденные. Именно благодаря этому обстоятельству теория, то есть евклидова геометрия, применяется при измерении площади земельных участков, проведении границ и ориентации на суше и на море, если говорить лишь о наиболее древних применениях геометрии. Современная геометрия умеет создавать другие теории, замкнутые в себе и непротиворечивые, но далекие от интуитивного фона и всяких приложений (если не считать приложениями использование этих теорий в других, столь же искус-



ственных теориях). Передо мной на столе лежит книга японского математика Фумимото Маэды. Из предисловия к ней видно, что ему удалось построить бесконечномерную геометрию, аналогичную обычной проективной геометрии, но без точек и прямых. Нельзя ограничить полет математической фантазии: если разрешается играть в шахматы, то трудно запретить создание геометрии без точек и прямых. Кстати сказать, теория Маэды обладает эстетической ценностью, хотя здесь уместно вспомнить слова Шварца: о красотах бесконечномерной геометрии японского математика можно рассказывать лишь узкому кругу посвященных.

Однако открытия, имеющие непреходящее значение, происходят иначе. Как, например, возникла топология? Листинг в 1847 г. заметил, что тонкостенная резиновая трубка отличается от квадрата из тонкой резины существеннее, чем квадрат от кружка: квадрат, нигде не разрывая его, можно растянуть так, что получится кружок, а превратить трубку в квадрат можно, лишь разрезав ее вдоль образующей. Эти соображения были положены в основу новой классификации геометрических тел. Развивая свои идеи, Листинг (1858 г.) обнаружил новый ранее неизвестный объект — так называемый лист Мёбиуса (названного в честь математика, открывшего его одновременно с Листингом). Листинг с жаром погрузился в исследования, и ему даже в голову не пришло, что он должен начать с системы аксиом новой геометрии.

А как поступает сам автор статьи о тенденциях современной математики, когда он занят поисками чего-то нового? В математическом мире Лоран Шварц снискал широкую известность своей теорией обобщенных функций — понятия, служащего обобщением понятия производной, или, если говорить на физическом языке, плотности массы и скорости движения. Вопрос этот далеко не праздный, поскольку, например, движение микроскопически малых взвешенных частиц, известное под названием броуновского движения, происходит следующим образом. Частицы двигаются по ломаным, каждый отрезок которых мог бы продолжаться до бесконечности, если бы внезапно, в какой-то конечный момент времени, не был «переломлен». Обычной производной недостаточно для описания скорости частицы, но, как показал Урбаник, движение частицы удобно описывать, если

воспользоваться понятием обобщенной функции Шварца. Отсюда видно, что Шварц как истинный математик умеет ставить естественные задачи, то есть такие, которые подсказывает природа или достаются нам по наследству от наших великих предшественников, и отнюдь не собирается играть в какую-то вымышленную игру, состоящую неизвестно в чем и неизвестно против кого.

Современную строгость математических исследований можно было бы сравнить с асептикой в хирургии. Хотя сегодня ни один хирург не пожелает оперировать иначе, тем не менее смешно утверждать, будто до того, как открытие Пастера показало, где скрывается причина высокой смертности хирургических больных, не было виртуозов скальпеля. Асептика как таковая не входит в число задач хирурга, а лишь является одной из гарантий успешного исхода хирургической операции (так же как и строгость в математике). Цель оперативного вмешательства и его характер определяются иными соображениями, имеющими с асептикой мало общего, и забота об асептике поручается вспомогательному персоналу.

Многие математики охотно обращаются к эстетическому критерию. «Это красивая теория», — говорят они. Однако красиво то, что понятно. Изящный результат должен быть достаточно общим, чтобы его можно было применить к известным, а не специально придуманным примерам, и в то же время не столь общим, чтобы стать тривиальным. Именно таким качеством — соразмерностью общности и нетривиальности — обладают естественные, то есть продиктованные самой природой теории. Евклиду его геометрию, несомненно, подсказала природа. Нетрудно привести и другой пример: что может быть естественнее созданной Понселе проективной геометрии! Однако изящны не только две названные теории. Никто не отрицает красоту теории Галуа, позволившей решить задачу о разрешимости в радикалах алгебраических уравнений пятой степени. Алгебраические уравнения естественно возникли при попытке «обратить» многочлены. В свою очередь многочлены появились как естественный продукт арифметических действий: умножения и сложения. Разумеется, говоря о красоте той или иной математической теории, мы отнюдь не ссылаемся на несуществующий абсолютный критерий кра-

сбыты или на какое-то объективное понятие «естественного». Мы лишь напоминаем, что субъективные критерии, возникающие на основе понятий прекрасного и естественного, оказывают более сильное влияние на выбор направления математических исследований, чем принцип абсолютной строгости.

Приведенные примеры имеют к рассматриваемой нами теме еще и то отношение, что напоминают нам об одном важном обстоятельстве. Математика никогда не существует в «готовом виде»: одни ее разделы развиваются и растут, другие — отмирают. Она представляет собой органический продукт народов и сообществ, а не случайной игры чьего-то каприза, как следовало бы ожидать, если бы математики, придерживаясь совета профессора Шварца, «вводили произвольные правила игры и затем разыгрывали партии в соответствии с этими правилами». Грех профессора Шварца заключается не только в том, о чем он поведал нам в своей статье, но и в том, что он обошел молчанием. Математика столь же естественна, как речь, ремесло, музыка или умение человека обрабатывать землю. Естественные организмы подчиняются биогенетическому закону Геккеля: эволюция отдельной особи повторяет в малом эволюцию рода. Этим обстоятельством и обусловлена невозможность учить математике по книгам Николая Бурбаки, поскольку они не позволяют ученику познать ту математику, которая является: «чем-то вроде экспериментальной физики». Тех же, кто занимается преподаванием математики, можно сравнить с дорожным указателем: они должны одной стрелкой указывать в уже пройденное прошлое, другой — в еще не изведенное будущее.

### ПУТИ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

Мне не хотелось бы затрагивать столь трудную проблему, как *определение прикладной математики*, коль скоро так принято называть геодезию и теорию кораблестроения, теорию вероятностей и номографию, баллистику, статику и математические основы кристаллографии. Обычно *прикладную математику* смешивают с *приложениями математики*, но и это замечание не облегчает стоящей передо мной задачи. Выдающийся математик Леон Лихтенштейн, много лет проработавший

на заводах Сименса в качестве инженера-теоретика (что, впрочем, он рассматривал как наказание, ни-спосланное ему судьбой), говаривал: «прикладной математики не существует, есть просто математика». Поскольку Лихтенштейн с успехом применял математические методы к теории фигур небесных тел, то к его мнению нельзя не прислушаться.

Там, где нет общепризнанных мнений, открывается простор для изложения личных взглядов. Я хочу воспользоваться этой привилегией и поговорить о путях развития прикладной математики. Мои вольные замечания и комментарии я прошу поэтому рассматривать лишь как выражение моих личных вкусов, склонностей и антипатий.

В настоящее время во всем мире нет крупных школ прикладной математики, которые можно было бы сравнить с такими центрами математической мысли, какими были в конце XIX в. и в начале XX в. до первой мировой войны Париж, Геттинген и Берлин. Существует англосаксонский центр — и я имею в виду школу математической статистики, выросшую из работ Р. А. Фишера и его учеников и перенесенную затем в Америку (не без сильного влияния Дж. Неймана), где она попала на благодатную почву, подготовленную математиками, работающими в промышленности и в сфере сбыта. Если в Англии основные интересы этой школы лежали в области генетики и экспериментов, проводимых специалистами по сельскому хозяйству, то в Америке интересы ее представителей сосредоточились главным образом на экономических проблемах и статистическом контроле качества промышленной продукции. Кроме того, и в Англии, и в США много внимания уделяется теории и практике создания электронных вычислительных машин. Тем не менее я беру на себя смелость утверждать, что *прикладная математика во всем мире находится в зачаточном состоянии*. Предвижу, что мое мнение встретит возражения: известно, как много журналов, выходящих в настоящее время, называются «Прикладная математика», а число статей по геометрической оптике, гидравлике, теории упругости, статистике, кинетической теории газов и многим другим предметам, подпадающим под название «прикладная математика», не уступает числу работ по чистой математике. Однако большинство работ

по прикладной математике относится к уже минувшему периоду: они новы по результатам, но стары по методу, их стиль относится к вчерашнему дню науки. Чем же отличается вчерашний этап развития прикладной математики от сегодняшнего или, лучше сказать, завтрашнего этапа? *Характером сотрудничества прикладной математики с другими дисциплинами.*

Смолоду нас учили, что сотрудничество математика с естествоиспытателем (то есть физиком, биологом, и т. п.) должно происходить по следующей схеме. Естествоиспытатель, работая над своей проблемой, сталкивается с необходимостью решить какую-то математическую задачу, формулируемую в виде алгебраического или дифференциального уравнения, и приносит ее математику. Тот решает задачу и отдает полученное решение в виде готовой формулы естествоиспытателю. Математика не должно интересоваться, откуда взялась задача и для чего послужит его решение. Ему не следует заглядывать в лабораторные журналы, куда записывают результаты экспериментов. Представление о том, что специализация науки зашла весьма далеко и взаимопонимание возможно лишь между членами одной и той же «корпорации», заранее обрекало на неудачу всякую попытку заняться «не своим делом». Нам говорили также, что в естественных науках нет ни точных определений, ни доказанных утверждений. Уже одно это возбуждало у математиков нашего поколения пренебрежительное отношение к наукам о природе. Совокупность данных, сообщаемых естествоиспытателем математику, нам рекомендовали принимать за систему аксиом, перекладывая всю ответственность на того, кто сообщает нам эти данные: ведь мы не можем ошибаться, а если наши формулы не согласуются с действительностью, то вина за это падает либо на естествоиспытателя, либо на действительность, но никогда не на математика.

Ясно, что такой способ сотрудничества редко приводил к положительным результатам. У многих естествоиспытателей он создавал впечатление, что совместная работа с математиками невозможна, а у математиков — что естественные науки представляют собой хаотическую грудку эмпирических фактов, а так называемые законы природы — выводы, полученные с помощью неполной индукции и не заслуживающие названия научных истин.

Этот взгляд иногда проявлялся довольно забавным образом. Когда молодой доцент спросил у одного известного польского математика, что следует включить в курс математики для студентов физического факультета, тот посоветовал ему непременно упомянуть о некоторых тонких вопросах теории рядов, о которых он, профессор, не успел рассказать в курсе математического анализа.

Как-то раз я выступил на заседании Польского математического общества с сообщением о *географических индексах*. Взглянув в зал, я, к своему удивлению, не обнаружил тех географов, с которыми не один час обсуждал различные вопросы, относящиеся к теме доклада. Спросив у молодого, способного математика, исполнявшего обязанности секретаря, уведомил ли он Географическое общество о докладе, я услышал отрицательный ответ. Как пояснил секретарь, он был уверен в том, что индексы лишь называются географическими, а в действительности они не имеют с географией ничего общего.

Вспоминаются мне также лекции по философии, которые я слушал в Геттингене. Старый профессор, говоря о том, как наблюдения могут привести к возникновению новых математических понятий, привел такой пример. Математик, идя по дороге, видит след от колес проехавшей телеги и думает: «Какая красивая кривая! Почему бы мне не заняться изучением ее свойств?» Так, еще в 1907 г., коллеги знаменитых геттингенских математиков не нашли более удачного примера математических понятий, навеянных изучением природы!

Примерно тогда же мне довелось услышать разговор между служащим страхового общества, приехавшим в Геттинген из Кракова, чтобы познакомиться со статистическими методами у Лексиса, и свежее испеченным доктором математики из Львова. Первый восхищался всемогуществом математики, владеющей методами строго научного подхода к изучению смертности или прироста населения, то есть явлений, кажущихся на первый взгляд чисто случайными, а математик с раздражением пытался втолковать ему, что закономерности изменения численности населения носят не математический, а естественный, «природный» характер, что математика не несет за них никакой ответственности и что если бы завтра они перестали действовать, то «нас, математиков,



это ничуть не огорчило бы». Страховой агент не уступал и продолжал петь дифирамбы математике с таким пылом, что нападки математика начинали принимать характер личного оскорбления. Самым интересным в этой сцене было то, что молодой доктор математики сам был натуралистом-любителем, сыном и братом известных натуралистов, но никогда не смешивал людских (то есть естественнонаучных) дел с делами божественными (то есть с математикой). По-видимому, разговор между математиком и естествоиспытателем столь труден, что он обречен на неудачу, даже если и тот, и другой живут в одном теле.

Душа математика, как и каждого человека, полна различных поверий, предрассудков и увлечений, симпатий и антипатий, склонностей к одному и неприязни к другому. Особое почтение вызывает присущая математiku способность ощущать красоту математики. Не каждому дано чувствовать красоту гор, не каждого волнует вид безбрежного моря, не до каждого доходит красота звезд, сияющих ночью. Еще труднее объяснить, в чем заключается красота теории функций комплексного переменного или синтетической геометрии. Есть разновидность математиков, считающих кощунством любое приложение. С. Янишевский говорил, что он не для того занимается математикой, чтобы ее применяли к строительству домов. Ему верили: чистый математик убежден, что дома строятся для того, чтобы математикам было где жить. С верой в абсолютную ценность математики связана вера в существование таких математических абстракций, как числа, функции, точки, множества, поверхности и т. д. Эта удивительная религия так же, как и другие религии, насчитывающие гораздо больше приверженцев, приписывает сверхъестественным объектам способность существовать в особом возвышенном смысле, по сравнению с которым обычное существование кажется иллюзорным и преходящим. Боги ненасытны: для прирожденного математика идеальная сфера не только существует, но и затмевает собой все реальные сферы, так что ни Луна, ни мыльный пузырь, с точки зрения математика, не являются сферами (что математик с готовностью докажет вам в любой момент, когда вы пожелаете). *Такая установка не только враждебна математике, но и таит в себе угрозу уничтожения*



для любой естественной науки. Это идеалистический подход, называемый именем того грека, который соединил культ философии с культом геометрии. Платоновские взгляды не мешают многим математикам с презрением относиться к философии. В этом проявляется сравнительно недавно возникшая традиция позитивизма: математик склонен считать набором бессмыслиц любую философию, за исключением математической логики (эта теория, выросшая из определенной философской установки, именно в кругах, далеких от приложений, имеет многочисленных сторонников). Таким образом, математики верят в различные духи и привидения, что мешает им выйти на путь прикладной математики.

Как же должно выглядеть сотрудничество математики с другими дисциплинами?

Сотрудничество между математиком и естествоиспытателем следует начинать не с того момента, когда задача поставлена, а значительно раньше. Дело в том, что существуют задачи, которые естествоиспытатель не считает математическими. В географии, например, встречается понятие *горного хребта*, но до сих пор ни одному географу не приходило в голову потребовать от математика точное определение этого понятия. Если же математик спросит у географа, что такое горный хребет, тот ему ответит: «Чтобы понять, что такое горный хребет, достаточно взглянуть на карту. Это всего лишь водораздел». Однако после недолгого разговора выяснится, что географы применяют понятие хребта не только к горизонталям (*изогипсам*), но и к другим *изолиниям*, например к *изотермам* (их проводят при определении границ климатических зон). Тут уже нет ни рек, ни ручьев, позволяющих определить водораздел. Желая понять географа, математик должен нарисовать произвольную систему изолиний и спросить, чем определяется направление хребта. После нескольких проб географ осознает необходимость определения, а математик догадается, что имеет в виду географ, говоря о горном хребте.

Как-то раз известный биолог навел математика и стал объяснять ему, как он вычисляет вероятность несовместимости крови матери и плода по резус-фактору. Математик с большим трудом следил за объяснением, поскольку вся проблематика была ему совершенно не

знаком, и время от времени задавал наивные вопросы. Спустя некоторое время бактериолог заявил, что прежний способ вычисления вероятности неверен и его необходимо заменить другим, добавив при этом: «Вот что значит побеседовать с человеком, который разбирается в том, что ему говорят. Такое общение настолько стимулирует мышление, что начинаешь видеть вещи, которых раньше не замечал». И действительно, новый способ определения вероятности оказался лучше старого, хотя придумал его сам биолог без малейшей подсказки со стороны математика. Это тоже сотрудничество.

Приведу другой пример, на котором отчетливо видно влияние научного стиля различных эпох на эволюцию решения одной и той же задачи. Задача, о которой пойдет речь, имеет самое непосредственное отношение к практике: измерение объема древесных стволов, или, как говорят специалисты по лесному хозяйству, *хлыстов*. Требуется определить объем ствола, измерив лишь его диаметр и высоту. В учебниках дендрометрии приводится множество формул, позволяющих вычислить объем ствола. Нетрудно представить себе, как появились эти формулы. Одна из них предполагает, что ствол дерева имеет форму *параболоида вращения*, другая рассматривает ствол как тело, получающееся при вращении вокруг оси дерева *кривой погони*, или *трактрисы*. Когда лесники поняли, что ствол дерева нельзя считать ни прямым круговым цилиндром, ни параболоидом, математики стали им предлагать все новые и новые геометрические тела, причем каждое следующее тело было красивее предыдущего. К сожалению, все формулы, так хорошо описывающие объемы геометрических тел, оказываются неприменимыми к настоящему лесу. Узнав об этом, математики, по-видимому, заявили, что стволы деревьев не стоят того, чтобы ими занимался истинный геометр, а лесники — что природа не желает подчиняться математике. Последняя фраза достойна того, чтобы ее внесли в словарь избитых истин. Ее (в различных вариантах) можно часто услышать из уст биологов, врачей и даже — *mutatis mutandis* \* — юристов и экономистов.

---

\* При надлежащем изменении слов (лат.).

Как выглядела бы эта задача в свете программы, которую я пытаюсь объяснить? Прежде всего, математик должен был бы отвергнуть упрек лесников в том, что все существующие формулы для определения объема ствола дерева плохие. Одна из них, основанная на измерении диаметра ствола на уровне середины ствола, чрезвычайно проста. Насколько известно, никто не проводил исследований, из которых бы следовало, что эта формула не самая лучшая из формул, использующих лишь одно измерение диаметра ствола. Правда, можно привести много примеров, когда эта формула приводит к весьма значительной ошибке, но отсюда лишь следует, что формула плохая. Но и плохая формула может быть наилучшей, и математик обязан обратить на это внимание лесников. Математик должен также сообщить, что коэффициент  $\pi/4$ , входящий в формулу, отнюдь не является неприкосновенной святыней, и если какой-нибудь другой коэффициент дает лучшие результаты, то его можно смело принять. Некоторые специалисты по дендрометрии вычисляют кубатуру ствола с коэффициентом  $\pi/4$ , а затем увеличивают результат на 2%. Если бы они с самого начала вместо  $\pi/4$  взяли коэффициент, равный 0,8, то пришли бы к тому же объему, но без лишней работы. Наконец, математик должен разработать наилучшую схему измерений, которая позволила бы получить наилучшую в статистическом смысле формулу, содержащую лишь одно значение диаметра ствола: ведь суть дела состоит именно в том, что формула должна давать малую погрешность при вычислении объема не одного ствола, а целой популяции. Сегодня все, о чем я говорю, кажется чрезвычайно простым и естественным, но 100 и даже 50 лет назад все обстояло совершенно иначе. Уже предварительные исследования свидетельствуют о том, что, следуя намеченному пути, можно значительно улучшить существующие способы измерений, в то же время не вступая в противоречие с принципом простоты. Можно поступить еще радикальнее, отказаться вообще от всяких формул, а вместо них составить таблицы, позволяющие определять кубатуру ствола по диаметру, измеренному на определенной высоте: ведь в принципе речь идет не о коэффициенте и не о формуле, а об объеме ствола, который можно принять

за функцию двух переменных, одну из которых требуется подобрать на основе статистических данных.

Выдающийся английский математик Г. Х. Харди, личность весьма необычная, сказал в своей «Апологии математика»: «Мои исследования никогда не имели никаких приложений, их не применяли ни для убийства людей, ни для порабощения народов». Выдающиеся математики всех времен высказывали убеждение, что математика оправдывает свое существование красотой доказательств и отвечает потребности человека к познанию истины, потребности бескорыстной, и с негодованием отвергали критерий практической применимости. Причина подобного мнения кроется отчасти в том, что математика допускает почти неограниченную свободу в выборе тем и методов исследования и, не требуя ни лабораторий, ни значительных денежных средств, представляет собой идеальный остров, на котором обитают лишь ее почитатели, получающие из рук своей королевы награды в виде вечных, непреходящих истин. Но тот же Харди составил шкалу значимости современных ему математиков, по которой самый слабый из его учеников имел 1 очко, а Альберт Эйнштейн — 100 очков. Каждого математика Харди оценивал по степени трудности утверждений, которые тот доказал. В мире математиков такой спортивный метод классификации довольно распространен, но для прикладной математики он не подходит, ибо в прикладной математике речь идет не об умении распутывать сложные узлы, а об умении рассекать их. Чем проще применяемый на практике математический метод, тем лучше. *Удивительно, сколько скрытых возможностей еще таят в себе элементарные математические соотношения. Поэтому речь идет о том, как увидеть «физический» смысл таких соотношений, а отнюдь не о том, как усложнить математический вопрос, бывший сначала понятным и естественным.*

В адрес математиков высказывают немало горьких слов, однако это не означает, что и противная сторона не несет вины. Обычно принято ссылаться на отсутствие математической подготовки у естествоиспытателей, но это далеко не худший эффект. В гораздо большей степени сказывается отсутствие логической подготовки. Постоянное пребывание в лаборатории, привычка к механическому повторению определенных движений,

необходимых при собирании экспериментальных данных, накладывают глубокий отпечаток на человека, формируя определенный тип *узкого* специалиста. Такая «специализация» — наихудшая из болезней, а такой «специалист» предаст забвению классическую культуру, презрительно относится к философии и разделяет распространенное в лаборатории мнение о том, будто мышление — это напрасная трата времени.

Генри Форд придерживался собственных взглядов на школьную программу. По его мнению, история, философия и математика (все, что выходит за пределы четырех арифметических действий) ни для чего не нужны, и, следовательно, вредны. Действительно, чтобы работать у Форда и даже быть самим Фордом, все эти науки не нужны. Но не следует забывать о том, что ни одна существенная деталь фордовского автомобиля не была изобретена в стенах его завода. Я цитирую Форда как патрона всех и всяких «спецов». После того как мыслительная работа выполнена другими и требуется лишь повторить созданную модель три миллиона раз, в ход идут другие, нематематические таланты.

Математику и переоценивают, и недооценивают. Переоценивают ее обычно математики, имея в виду уже достигнутые результаты. Недооценивают же все, когда речь заходит о том, что еще может сделать математика. Несколько лет назад в одном медицинском журнале появилась полемическая статья, направленная против профессора педиатрии, применявшего математику в своих исследованиях туберкулеза у детей. В статье, в частности, говорилось о том, что математику нельзя применять к живому организму, поскольку он, по словам автора, «многомерен», а современная математика якобы «одномерна». Отсюда следовал вывод, что лишь «многомерную» математику можно будет когда-нибудь применять в медицине. Самое забавное, что педиатр, вызвавший столь бурное негодование у своего коллеги, впервые применил двухпараметрическую оценку реакции кожи на лекарственный препарат, то есть воспользовался многомерностью, тогда как до него оценку производили лишь по одному параметру. Эта «незначительная» деталь ускользнула от автора статьи. Кроме того, ссылаясь на известного логика Лукасевича, автор статьи спутал «трехзначную логику» с «многомерной матема-



тикой». Что означает последний термин, понять трудно. Еще труднее понять упрек в «одномерности», коль скоро в математике рассматриваются многомерные и даже бесконечномерные пространства. Литература по математическим методам в ятрохимии\* насчитывает сотни названий. По-видимому, автор статьи не отдавал себе отчета в том, что врач, делающий заключение о ходе болезни по температурной кривой, занимается прикладной математикой. Автор, будучи «узким специалистом», при чтении медицинской статьи, «насыщенной» математикой ничуть не больше других, впервые в жизни узнал о применении математики в медицине. В том же номере журнала появилась и другая статья о том же предмете. В ней автор упрекает одного педиатра в том, что тот из равенства  $a = b$  выводит новое равенство  $\log a = \log b$ . Автор статьи, очевидно, знал, что такое логарифм, но постичь рассуждение, с помощью которого был совершен переход от  $a = b$  к  $\log a = \log b$ , оказалось выше его сил. Таковы плоды «специализации».

Путь к математическим идеям, могущим оказать помощь медикам, разумеется, проходит не через «многомерную математику». Наоборот, иногда разумнее не увеличивать, а уменьшать число параметров. Приведем пример. Когда приводятся статистические данные о смертности от той или иной болезни, полученные при наблюдении  $n$  случаев, то наряду с величиной  $p$  — долей смертельных исходов от общего числа случаев — следует указывать и «среднюю ошибку»  $\sqrt{pq/n}$ , где  $q = 1 - p$ .

Врач, читающий такие данные, извлекает из них ответ на два вопроса: во-первых, получает возможность оценить опасность болезни (по величине  $p$ ), во-вторых, делает заключение о «богатстве» статистики (числе наблюдавшихся случаев) и степени надежности первой оценки (по средней ошибке  $\sqrt{pq/n}$ ). Оба числа взяты из одних и тех же наблюдений, причем второе число получено теоретически — по формуле Бернулли. Более существенной характеристикой является первое число: при увеличении числа наблюдаемых случаев  $n$  дробь  $p$  сначала изменяется, хотя и не слишком заметно, и лишь

---

\* Химии лекарственных препаратов.

затем ее колебания становятся пренебрежимо малыми (это предельное значение  $p$  и служит истинным показателем смертности), а средняя ошибка практически обращается в нуль. Мы видим, что информация о ней играет лишь временную роль. Иначе обстоит дело при исследовании уменьшения гранулоцитоза у больных, получающих пенициллин. Графически ход болезни обычно представляют в виде ломаной, общую тенденцию которой к возрастанию или убыванию можно оценить числом  $s$ . Кроме того, снова можно ввести «среднюю ошибку  $b$ », характеризующую отклонение ломаной от постоянного направления. Оказалось, что для прогноза исхода болезни решающее значение имеет отношение  $t = s/b$ . Таким образом, всю информацию, интересующую лечащего врача, можно выразить одним числом  $t$ . Если бы поступили аналогичным образом с показателем смертности  $p$ , то получили бы отношение, которое при возрастании числа наблюдаемых случаев стремилось бы к бесконечности. Все объясняется тем, что смертность от изучаемой нами болезни отлична от нуля. При изучении же грануломатоза вторая порция информации не является «ошибкой» первой: она существенна и вместе с первой верно передает характер явления.

Математическое образование — не самое главное. В этом нас убеждает хотя бы научная деятельность Р. А. Фишера. Этот выдающийся английский генетик самостоятельно ставил математические задачи, возникающие в естественных науках при планировании и статистической интерпретации экспериментов. Р. А. Фишер написал книгу «Статистические методы для исследователей», которая была непонятна естествоиспытателям, поскольку в ней вводились новые и трудные понятия и методы, и раскритикована математиками как путаная и ошибочная, поскольку ее автор был математиком-самоучкой и не владел ни терминологией, ни стилем, привычным математику, прошедшему хорошую школу. Несмотря на это, книга Р. А. Фишера силой содержащихся в ней оригинальных методологических и математических идей разрушила окружавшую ее стену предрассудков и неоднократно переиздавалась. Для математической статистики книга Фишера сделала неизмеримо больше, чем все учебники по математической статистике, выходившие в тот же период времени. Ценность ее за-



ключается не в каких-то сложных математических доказательствах или многоэтажных формулах, а в ясном понимании автором существа дела. Понятие *вариации* (так называли ученики Фишера дисперсию) было, по-видимому, известно и до Фишера, но создание совершенно элементарного метода разложения вариации на части — *дисперсионного анализа*, безусловно, заслуга Фишера. Этот метод играет огромную роль в различных областях исследования.

Эра простоты не минула. Не только в науке о природе, но и в технике элементарная математика позволяет достичь многого. Даже когда возникает необходимость в высшей математике, ее требуется не так уж много. Приведу пример. Как известно, в Польше существовала школа линейного функционального анализа (Банах, Сакс, Мазур, Орлич и другие). Достаточно было обратить внимание на то, что широко используемое в функциональном анализе понятие нормы непосредственно приложимо к задаче о тарифе на электроэнергию, как тотчас же открылась оживленная дискуссия о тарификации электроэнергии на новой основе. И это дала лишь первая страница первого раздела функционального анализа. Отсюда ясно, какие неиспользованные возможности таятся в других, не менее известных понятиях. Трудность состоит в том, что не так много на свете инженеров-электриков, которые слышали о норме функции, и еще меньше чистых математиков, способных понять, что тариф на электроэнергию составлен недостаточно разумно.

Я хотел бы привести пример применения совсем элементарной математики — такой, которая не требует знаний, выходящих за пределы программы средней школы. Школьники хорошо знают способ «честного» раздела орехов на две части, основанный на принципе: «Один делит, другой выбирает». Этот способ допускает обобщение на случай нескольких партнеров или раздела на неравные доли. Необходимо было лишь обратить внимание на то, что задача о справедливом в юридическом смысле разделе по существу является математической задачей. Ясно, что юрист не мог заметить этого. Ему мешало предвзятое мнение о том, что в математике равенство понимается лишь как равенство чисел (когда имущество, подлежащее разделу, считается на штуки)

или площадей (когда разделу подлежит участок земли). Возможность математического подхода к субъективным оценкам и то обстоятельство, что неодинаковая стоимость частей не затрудняет, а облегчает справедливый раздел, — вывод, к которому приводит математическое мышление, примененное к задаче из повседневной жизни. Вероятно, каждый согласится, что сущность этого открытия не имеет ничего общего с формулами высшей геометрии.

Может случиться и так, что от элементарной задачи к элементарному решению сначала легче прийти, если воспользоваться высшей математикой. Но после того, как первый путь проложен, обычно удается найти другой, более легкий. И если даже второй путь не безупречен с точки зрения строгости, им все же можно пользоваться, не опасаясь совершить ошибку. Примеры, подтверждающие такие случаи, особенно часто встречаются в теории вероятностей.

Но хватит примеров. Пора перейти к заключению. Суть сказанного можно сформулировать так. Прикладная математика находится в зачаточном состоянии. Сегодня мы еще в состоянии направить ее развитие в любую сторону и располагаем в этом отношении неограниченной свободой. Необходимо лишь понять, что математика — не свод готовых ответов на любой вопрос. Математика — это скорее школа мышления. Естественные и технические науки также нельзя рассматривать лишь как реестр наблюдений и экспериментов. Прикладная математика есть не что иное, как сотрудничество математики и этих наук. Прикладной математики в виде готовой теории не существует. Она возникает, когда математическая мысль прикасается к окружающему миру, но лишь при условии, если и математический дух, и природная материя не закоснели. Следует иметь в виду, что наука не только описывает существующую действительность, но и создает новую, поэтому математик должен занимать активную позицию: не ожидать задач, а самому их ставить. Вряд ли можно сомневаться, что успехи так понимаемой прикладной математики превзойдут самые смелые ожидания.